Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Григорьев Юрий Александрович

Геометрические методы исследования интегрируемых и суперинтегрируемых систем в классической механике

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Цыганов Андрей Владимирович

Санкт-Петербург – 2012

Содержание

Введение

Актуальность работы

Исследование интегрируемых систем с момента постановки задачи разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби и поиска интегралов движения систем классической механики являлось одной из самых сложных проблем теоретической физики. После первых успехов для множества известных к тому времени и некоторых вновь построенных интегрируемых систем прогресс в этой области замедлился, поскольку общего метода исследования заданной интегрируемой системы не было обнаружено, и нахождение переменных разделения превратилось в своего рода искусство, в котором каждый из исследователей должен был выбирать различные методы решения для различных систем, не имея возможности предвидеть результаты применения этих методов и очертить круг действий (таких, как замены переменных, переход к промежуточным координатам), необходимых для успешности исследования.

Нахождение переменных разделения для конечномерных интегрируемых систем оставалось скорее искусством, чем научным методом на протяжении более века, хотя в течение этого времени были построены подробные классификации интегрируемых систем по виду интегралов движения, и выявлена связь теории интегрируемых систем с некоторыми классами нелинейных систем. Метод решения обратной задачи рассеяния, построенный во второй половине XX века, позволил найти явные решения для широкого класса нелинейных уравнений, а последующий перенос многих его положений на квантовый случай предоставил возможность его применения для построения точных решений большого количества интегрируемых систем, описывающих модели квантовой механики, квантовой теории поля и статистической физики.

Дальнейшее изучение возможностей переноса методов исследования интегрируемых систем с классических на квантовые случаи позволило выделить основные элементы таких схем, вернуться к исследованным ранее классическим системам и сделать первые шаги к пониманию причин успеха или неудачи в разделении переменных для тех или иных систем. Внутренние симметрии систем и вообще методы задания систем и пространств, в которых интегрируемые системы определены, оказали определяющее влияние на развитие методов разделения переменных в 1980-е годы. Найденные инвариантные характеристики интегрируемых систем позволили создать новый математический аппарат для решения классической задачи, в котором оказались естественным образом взаимосвязаны функциональный анализ, теория функций, алгебраическая, дифференциальная и пуассонова геометрия, теория групп и алгебр Ли.

Быстрое развитие в конце XX и начале XXI века компьютерных средств, разработанных для решения различных математических задач, в частности, пакетов компьютерной алгебры общего назначения, позволило в полной мере использовать найденные связи между теорией интегрируемых систем и другими областями математической физики. Возможность использовать компьютеры для сложных и объёмных расчётов оказалась ключевой для применения формализованных методов исследования интегрируемых систем, позволив как применять их для уже изученных систем с интегралами высоких степеней по импульсам, так и с гораздо меньшими усилиями исследовать обширные классы в том числе и новых интегрируемых систем.

Таким образом, современные хорошо формализуемые методы исследования интегрируемых систем являются одним из актуальных направлений в теории квантовых и классических интегрируемых систем. Интерес к таким методам определяется не только практическим значением метода для разделения переменных в заданной системе классической механики, но и теоретическими возможностями построения новых интегрируемых систем и более полного понимания их организации, как для классического, так и для квантового случая.

Цель диссертационной работы состоит в развитии геометрических методов исследования интегрируемых по Лиувиллю систем классической механики.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Реализован метод построения переменных разделения и интегралов движения для L-систем.

2. Разработан метод классификации интегрируемых систем типа Штеккеля.

3. Исследованы методы поиска новых интегрируемых систем.

4. Предложен метод классификации суперинтегрируемых систем типа Штеккеля, основанный на теоремах сложения.

5. Создан метод разделения переменных для широкого класса бигамильтоновых систем с интегралами движения старших степеней.

6. Данный метод применён к конкретным системам с интегралами высоких порядков по импульсам.

Научная новизна В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Создана практическая реализация алгоритма построения переменных разделения и интегралов движения для L-систем на основе методов бигамильтоновой геометрии.

2. Построена классификация систем типа Эйлера на основе теорем сложения.

3. Предложен метод построения суперинтегрируемых систем типа Ришело.

4. Осуществлено разделение переменных для обобщённой системы с потенциалом четвёртой степени и интегралом четвёртой степени по импульсам.

Практическая значимость Диссертация носит теоретический характер. В то же время прикладное программное обеспечение, представленное в диссертации, может быть использовано для исследования интегрируемых и суперинтегрируемых систем с интегралами второго и более высоких порядков по импульсам. Метод классификации интегрируемых систем, основывающийся на использовании теорем сложения, может быть применён для исследования существующих и построения новых суперинтегрируемых систем. Метод исследования, основанный на использовании оператора рекурсии, позволяет находить переменные разделения для широкого класса бигамильтоновых систем.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Практическая реализация алгоритма построения переменных разделения и интегралов движения для L-систем на основе методов бигамильтоновой геометрии.

2. Классификация систем типа Эйлера на основе теорем сложения.

3. Метод построения суперинтегрируемых систем типа Ришело.

4. Разделение переменных для обобщённой системы с потенциалом четвёртой степени и интегралом четвёртой степени по импульсам.

Апробация работы Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. The third International Conference Superintegrable Systems in Classical and Quantum Mechanics, Prague, 5-9 May, 2008;

2. XIII International Conference “Symmetry Methods in Physics”, Dubna, Russia, July 6-9, 2009;

3. Second International Conference Geometry, Dynamics, Integrable Systems, Belgrade, 7 – 13 September 2010;

4. International Conference Geometry, Dynamics, Integrable Systems, Belgrade, 2 – 7 September 2008;

а также на семинарах в ОИЯИ, МГУ, СПбГУ и УдГУ.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 статьях в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендуемых ВАК для опубликования основных научных результатов диссертаций [5–7, 41–44].

Личный вклад автора Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 4 глав и библиографии. Общий объем диссертации 92 страницы. Библиография включает 103 наименования на 11 страницах.

Обзор литературы

Теория интегрируемых систем берёт начало в XIX веке, когда, через 150 лет после создания ньютоновской механики, переформулированной к этому времени в абсолютно новом виде Эйлером и Лагранжем, выявившими основные математические принципы, лежащие в основе хорошо известных к тому времени законов движения, Гамильтон построил новый формализм классической механики, перенеся принципы, полученные им в исследовании геометрической оптики, в область динамики [45]. Он практически сразу был успешно применён Якоби для решения ограниченной задачи трёх тел [53], для которой был найден интеграл движения, а затем расширен им на случай зависящих от времени сил [54]. Этот новый формализм получил название формализма Гамильтона–Якоби.

Дальнейшее развитие теории интегрируемых систем классической механики связано с именем Лиувилля, который ввёл определение интегрируемой системы как системы, обладающей полным набором интегралов в инволюции, и в работе [72] привёл решение такой системы в квадратурах, а также с работой Якоби [56], в которой он, в частности, приводит решение задачи о движении по геодезическим линиям на эллипсоиде, используя эллиптические координаты и функции.

Основной задачей теории интегрируемых систем в то время представлялось исследование известных систем и поиск новых интегрируемых по Лиувиллю систем. Переходя от использования эллиптических функций к гиперэллиптическим, сначала Нейман [74], а затем и другие исследователи нашли большое количество новых интегрируемых систем. Тем не менее, общего метода интегрирования для систем классической механики найти не удавалось, и всё, чем ограничилось исследование интегрируемых систем — попытки классификации, такая, как, например, проведённая в конце XIX века

Штеккелем [89].

Развитие в области исследования интегрируемых систем остановилось на вопросе отличий между интегрируемыми, неинтегрируемыми и хаотическими системами. Эта задача была связана с поиском метода, позволяющего определить, являются ли данные дифференциальные уравнения интегрируемыми или нет — безотносительно того, являются ли они гамильтоновыми. Ответ на этот вопрос, как оказалось, зависит от свойств аналитического продолжения решений в область комплексных переменных, а именно, от типа особенностей этих решений. Такой метод, не связанный с физическими свойствами системы и оперирующий только свойствами данного дифференциального уравнения, восходит к классической работе Ковалевской [66], посвящённой решению уравнений Эйлера–Пуассона, описывающих движение тяжёлого волчка относительно неподвижной точки. В этой работе Ковалевская не только нашла новый случай интегрируемости системы, но и предложила новую замечательную замену переменных, использующую гиперэллиптические функции. Способы получения подобного преобразования для других интегрируемых систем с интегралами старших степеней оставались неизвестными, хотя этот метод и был впоследствии применён для разделения переменных в системе Горячева–Чаплыгина и для построения переменных Флашки для цепочек Тоды [88]. Тем не менее, классификация обыкновенных дифференциальных уравнений по типам особенностей их решений оставалась предметом значительной активности математиков. Важный результат в этой области был получен Пенлеве [75], который, как и Ковалевская, классифицировал уравнения по типам особенностей, выделив 50 типов уравнений в рамках рассматриваемого класса, шесть из которых — уравнения Пенлеве — не имеют алгебраических интегралов. Хотя эти уравнения и не описывают интегрируемых по Лиувиллю систем, Гарнье показал связь уравнений Пенлеве с интегрируемыми системами, в процессе обобщения уравнений Пенлеве построив интегрируемую систему, решаемую в гиперэллиптических функциях [38]. При этом в работе Гарнье неявно используется пара Лакса, которая будет предложена Лаксом для решения уравнений теории солитонов более чем полвека спустя, с началом развития теории бесконечномерных интегрируемых систем.

В основе периода бурного развития, начавшегося в теории интегрируемых систем во второй половине XX века, лежит теория солитонов. История солитонов начинается с наблюдения английским инженером Расселом «уединённой волны», активно обсуждавшегося Лондонским королевским обществом, в результате чего к началу XX века Кортвегом и де Вризом было построено так называемое уравнение KdV, описывающее слабо нелинейные волны на мелкой воде. После работы Кортвега и де Вриза [65], опубликованной в 1895 году, тема «уединённой волны» была исчерпана и к уравнению KdV обратились вновь лишь в начале 1960-х годов в связи с некоторыми задачами физики плазмы.

Стимулом к изучению уравнения KdV стала работа Ферми, Улама и Паста [35], которые, поставив целью использовать имевшийся у них в распоряжении компьютер для решения теоретической задачи, выбрали в качестве таковой исследование распределения энергии в связанной цепочке осцилляторов. Полученное в результате численного интегрирования решение заинтересовало М. Крускала и Н. Забуского, которые построили непрерывный предел цепочки Ферми-Улама-Паста, совпавший с уравнением KdV. Исследовав это уравнение численно, Крускал и Забуский получили решения, распадавшиеся на волны с различной амплитудой. Чтобы подчеркнуть устойчивость этих нелинейных решений, которые поведением напоминали частицы, они назвали решения «солитонами» [103]. Основываясь на известных численных результатах, Гарднер, Грин, Крускал и Миура применили метод обратной задачи рассеяния, использовавшийся в квантовой механике, для аналитического решения уравнения KdV [37]. Используя обнаруженную связь между уравнением KdV и линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, они построили многосолитонные решения и показали, что уравнение KdV обладает бесконечным множеством интегралов движения. Позже этот результат был воспроизведён П. Лаксом с использованием более удобной схемы, называющейся сейчас представлением Лакса [70], в которой уравнение KdV возникает как условие совместности линейных дифференциальных уравнений. В работе [8] В. Е. Захаров и Л. Д. Фаддеев показали, что уравнение KdV является вполне интегрируемой бесконечномерной гамильтоновой системой.

Некоторое время считалось, что методы, разработанные Гарднером и Лаксом, применимы только к уравнению KdV, но вскоре было выяснено, что существуют и другие нелинейные системы, укладывающиеся в рамки этого же метода и имеющие солитонные решения [11]. В качестве примера первой такой системы можно привести независимо открытую М. Тодой в это же время интегрируемую цепочку с экспоненциальным взаимодействием. При разработке модели теплопроводности Тода построил нелинейное уравнение, которому удовлетворяла нелинейная волна, заданная эллиптической функцией, и в конечном счёте получил цепочку с экспоненциальным взаимодействием, имеющую много сохраняющихся величин помимо импульса и энергии [90]. В отличие от нелинейных цепочек Ферми–Улама–Паста, ведущих себя периодически при небольших энергиях, цепочка Тоды допускала строго периодические волны, а также устойчивые импульсы–солитоны [91].

Помимо приложения метода обратного рассеяния ко всё большему набору систем [2], в дальнейшем развивались и другие методы интегрирования, такие как прямой метод Хироты [49], алгебро-геометрические (периодические) методы [14], построенные С. П. Новиковым, Б. А. Дубровиным, И. М. Кричевером и В. Б. Матвеевым [29], а также сформировавшиеся к началу 1980-х годов алгебраические методы, основанные на гамильтоновом формализме на алгебрах Ли [13, 62, 81, 85]. В последующие годы именно это направление было основным в развитии теории классических интегрируемых систем, как в рамках поиска многомерных обобщений и пар Лакса для известных систем классической механики, так и при построении новых интегрируемых систем [4].

В дальнейшем классическая теория разделения переменных активно развивалась во взаимодействии с теорией квантовых интегрируемых систем. Обнаруженная связь между преобразованием Бэклунда в теории классических интегрируемых систем, с одной стороны, и Q-оператором Бакстера для квантовых интегрируемых систем, с другой стороны [76], позволила говорить о том, что метод разделения переменных остаётся, наряду с квантовым и классическим методом обратной задачи рассеяния, универсальным способом решения классических и квантовых интегрируемых систем [88]. Для классических интегрируемых систем, решаемых методом обратной задачи, стандартное построение переменных действие-угол с использованием полюсов функции Бейкера–Ахиезера эквивалентно разделению переменных. Во многих случаях существует возможность найти точный квантовый аналог метода разделения переменных. Развитие квантового метода обратной задачи рассеяния открыло путь к методическому построению квантовой теории разделения переменных для целых классов интегрируемых систем, порождаемых различными R-матрицами (решениями уравнения Янга–Бакстера). Перечень систем, к которым успешно применён этот новый подход, уже включает в себя такие системы, как XXX магнетик [87], волчок Горячева–Чаплыгина [64] и цепочка Тоды [68, 86].

Глава 1

Основные определения

Рассмотрим риманово многообразие $\mathcal{Q}$ с заданными на нём локальными координатами $q = (q^1, q^2, \ldots, q^n)$ и положительно определенным метрическим тензором $\mathbf{G}$. На кокасательном расслоении $T^*\mathcal{Q}$ многообразия $\mathcal{Q}$ стандартным образом определим канонические координаты (p, q) и рассмотрим динамическую систему

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}$$
$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

с функцией Гамильтона натурального вида

$$H = T(p, q) + V(q) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{g}^{ij}(q) p_i p_j + V(q). \tag{1.1}$$

Здесь $\mathrm{g}^{ij}(q)$ — компоненты метрического тензора $\mathbf{G}$, $V(q)$ — потенциальная энергия системы, которая является гладкой функцией на римановом многообразии $\mathcal{Q}$, каноническим образом поднятой до функции на всем фазовом пространстве $T^*\mathcal{Q}$, а также используются канонические скобки Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right].$$

Интегралом движения системы называется функция, заданная на координатах фазового пространства, которая постоянна на всей траектории движения системы. В формализме скобок Пуассона функция F является интегралом системы с функцией Гамильтона H тогда и только тогда, когда скобка Пуассона

$$\{H, F\} \equiv 0$$

тождественно равна нулю. Пусть у этой системы есть n независимых интегралов движения. В таком случае выполняется теорема Лиувилля о полной интегрируемости системы [1].

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{M}^{2n}$ *— фазовое пространство гамильтоновой системы со стандартной симплектической структурой и гамильтонианом* $H(p, q)$. *Предположим, что эта система имеет* n *интегралов движения* $F_1, \ldots, F_n$ *в инволюции*

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Если

1. *на множестве*

$$M_a = \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n} : F_i(p, q) = a_i\}$$

   функции $F_1, \ldots, F_n$ *независимы;*

2. *множество* M_a *является связной и компактной поверхностью,*

то

1. *решение гамильтоновой системы на поверхности* M_a *может быть получено в квадратурах;*

2. *поверхность* M_a *является* n*-мерным тором* $\mathbb{T}^n$, *несущим квазипериодические движения;*

3. *в окрестности поверхности* M_a *существуют такие канонические координаты* $I_1, \ldots, I_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ $(0 \leq \varphi_i \leq 2\pi)$, *называемые переменными действие-угол, в которых уравнения движения имеют вид*

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = \omega_i(I_1, \ldots, I_n) = \frac{\partial H(I_1, \ldots, I_n)}{\partial I_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Координаты $I_1, \dots, I_n$ нумеруют инвариантные торы с заданными на них угловыми переменными φ_i. Траектории системы представляют собой квазипериодические обмотки с частотами ω_i, вообще говоря, меняющимися от тора к тору.

Необходимо отметить, что некоторые встречающиеся в практических задачах интегрируемые по Лиувиллю системы, заданные на $2n$-мерном фазовом пространстве, имеют более, чем n интегралов движения. Такие интегралы, согласно определению, будут коммутировать с гамильтонианом системы, но не обязательно будут коммутировать друг с другом. В таком случае можно сформулировать некоммутативный вариант теоремы Лиувилля.

Теорема 2. *Предположим, что гамильтонова система на симплектическом многообразии M^{2n} имеет $n+k$ интегралов $F_1, F_2, \dots, F_{n+k}$, причём на поверхности*

$$M_a = \{x \in M^{2n} : F_i(x) = a_i, 1 \le i \le n+k\}$$

эти функции независимы, а в её окрестности постоянен ранг матрицы скобок Пуассона $\|\{F_i, F_j\}\|$. Тогда, если поверхность M_a связна и компактна и ранг матрицы скобок Пуассона не превосходит $2k$, то поверхность M_a диффеоморфна $(n-k)$-мерному тору и на ней можно выбрать угловые переменные $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k} \mod 2\pi$ так, чтобы уравнения Гамильтона приняли вид

$$\dot{\varphi}_s = \omega_s = const(1 \le s \le n-k)\,.$$

Системы, обладающие числом независимых интегралов движения, большим размерности пространства n, называются суперинтегрируемыми, а если число интегралов движения равно $2n-1$ (то есть система обладает максимально возможным числом независимых интегралов движения), то такая система называется максимально суперинтегрируемой.

Для интегрирования системы классической механики, заданной оператором Гамильтона, может применяться метод разделения переменных Гамильтона-Якоби. Этот метод основывается на замене переменных в уравнении Гамильтона-Якоби

$$H(p, q) = E, \tag{1.2}$$

после которой переменные в уравнении разделяются. Согласно определению Якоби [53], в уравнении (1.2) имеет место разделение переменных, если существует полный интеграл вида

$$\mathcal{S}(Q, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \mathcal{S}_i(Q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{1.3}$$

где i-тое слагаемое $\mathcal{S}_i$ зависит только от i-той координаты Q_i и от n параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Здесь предполагается, что переменные разделения $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ являются координатами Дарбу, т. е. $\{Q_i, Q_j\} = 0$.

В этом случае переменные Q называются переменными разделения, а сопряженные им импульсы находятся из уравнений Якоби

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{S}_i(Q_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial Q_i}\,. \tag{1.4}$$

Эти уравнения и их более симметричную форму

$$\Phi_i(Q_i, P_i,\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0 \tag{1.5}$$

называют разделенными уравнениями — по Эйлеру „aequatio separata“ [32]. Всюду далее под разделением переменных будет пониматься разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби, которое позволяет найти полный интеграл этого уравнения вида (1.3).

Главным недостатком метода разделения переменных считается то, что нахождение переменных разделения для каждой конкретной интегрируемой системы является своего рода искусством. С конца XIX века исследовался вопрос о существовании общих методов разделения переменных для гамильтоновых систем.

При рассмотрении систем с большим числом степеней свободы важный частный случай представляют собой введённые в конце XIX века системы Штеккеля [89], являющиеся обобщением систем Лиувилля, которые допускают интегрирование в квадратурах методом разделения переменных. Гамильтониан таких систем имеет вид

$$H = \sum_{j=1}^{n} a_j(q_1, \ldots, q_n) \left[p_j^2 + U_j(q_j) \right] . \qquad (1.6)$$

Теорема Штеккеля для таких систем может быть сформулирована в следующем виде.

Теорема 3. *Для гамильтоновой системы с гамильтонианом вида (1.6) следующие утверждения эквивалентны:*

1. *уравнения Гамильтона-Якоби (1.2) допускают разделение переменных;*
2. *существует матрица S порядка n с ненулевым определителем*

   $$\det S \not\equiv 0 \, ,$$

   элемент s_{jk} которой зависит только от q_k, причём выполнены условия

   $$\sum_{j=1}^{n} s_{kj}(q_j) a_j(q_1, \ldots, q_n) = \delta_{k1} \, ;$$

3. *Существует n квадратичных по импульсам функционально независимых интегралов движения.*

Теорема Штеккеля полностью решает вопрос о разделении переменных для систем с гамильтонианом вида (1.6). В то же время единственным общим результатом, применимым ко всем интегрируемым системам, является следующий критерий, предложенный в работе Ливи-Чивита [71]: уравнение Гамильтона-Якоби (1.2) интегрируемо методом разделения переменных, если функция Гамильтона $H(P,Q)$ удовлетворяет следующим $n(n-1)/2$ уравнениям при $i\neq j$:

$$\frac{\partial H}{\partial P_j}\frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{\partial^2 H}{\partial Q_j\partial Q_i}-\frac{\partial H}{\partial P_j}\frac{\partial H}{\partial Q_i}\frac{\partial^2 H}{\partial Q_j\partial P_i}-\frac{\partial H}{\partial Q_j}\frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{\partial^2 H}{\partial P_j\partial Q_i}+\frac{\partial H}{\partial Q_j}\frac{\partial H}{\partial Q_i}\frac{\partial^2 H}{\partial P_j\partial P_i}=0. \tag{1.7}$$

До недавнего времени исследование системы уравнений Леви-Чивита (1.7) считалось практически невыполнимой задачей в том числе и потому, что сформулирован этот принцип с использованием неизвестных переменных разделения. Однако для некоторых частных классов интегрируемых систем уравнения Леви-Чивита недавно были переписаны в инвариантной геометрической форме, не зависящей от выбора координатной системы, что позволяет находить их решения.

Переменные разделения (Q,P) в (1.7) обычно считают связанными с исходными переменными (q,p) посредством точечных канонических преобразований вида

$$Q=f(q),\qquad P=f'(q)\,p\,,\qquad f=(f_1,\ldots,f_n)\,. \tag{1.8}$$

Функции Гамильтона натурального вида ковариантны относительно точечных преобразований:

$$H=T(P,Q)+V(Q)=\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{g}^{ij}(Q)P_iP_j+V(Q)\,, \tag{1.9}$$

то есть точечные преобразования сохраняют форму гамильтониана, при этом функции $\mathrm{g}^{ij}(q)$ и $V(q)$ изменяются.

Для систем с функциями Гамильтона натурального вида уравнения Леви-Чивита (1.7) можно переписать в форме

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}^{n} P_iP_jP_kP_l\Big(\frac{1}{2}\mathrm{g}^{rs}\partial_r\mathrm{g}^{ij}\partial_s\mathrm{g}^{kl} + \partial_r\partial_s\mathrm{g}^{ij}\mathrm{g}^{kr}\mathrm{g}^{ls}& \\
-\partial_r\mathrm{g}^{is}\mathrm{g}^{jr}\partial_s\mathrm{g}^{kl} &- \partial_s\mathrm{g}^{ir}\mathrm{g}^{js}\partial_r\mathrm{g}^{kl}\Big) \\
+\sum_{ij}^{n} P_iP_j\Big(\frac{1}{2}\mathrm{g}^{rs}\partial_r\mathrm{g}^{ij}\partial_s V + \frac{1}{2}\mathrm{g}^{rs}\partial_r V\partial_s\mathrm{g}^{ij} &+ \partial_r\partial_s V\mathrm{g}^{ir}\mathrm{g}^{js} \\
-\partial_r\mathrm{g}^{is}\mathrm{g}^{jr}\partial_s V &- \partial_s\mathrm{g}^{ir}\mathrm{g}^{js}\partial_r V\Big) \\
&+ \mathrm{g}^{rs}\partial_r V\partial_s V = 0\,.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Здесь $\partial_r = \partial/\partial Q_r$, $\partial_s = \partial/\partial Q_s$ и $r \neq s$.

Поскольку эти уравнения справедливы при любых значениях импульсов P_i, система (1.10) разделяется на три уравнения. При этом первое из них не зависит от потенциала системы и описывает разделение переменных для движения по геодезическим.

Глава 2

Разделение переменных для L-систем

При рассмотрении тензоров будут применяться стандартные соглашения о суммировании и ранге тензоров. Например, производится суммирование от 1 до n по каждому индексу, встречающемуся дважды, один раз наверху, другой раз внизу. Кроме того, одной и той же буквой $\mathbf{K} = (K^{ij}) = (K^i_j) = (K_{ij})$ будут обозначаться тензоры типа $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, для поднятия и опускания индексов будет использоваться метрический тензор $\mathbf{G}$.

Рассмотрим риманово пространство постоянной кривизны $\mathcal{Q}$, $\dim \mathcal{Q} = n$ с положительно определенным контравариантным метрическим тензором

$$\mathbf{G} = \mathrm{g}^{ij}\partial_i \otimes \partial_j, \qquad \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial q^k}. \tag{2.1}$$

Любой контравариантный симметрический тензор $\mathbf{K}$ на многообразии $\mathcal{Q}$ можно взаимнооднозначно отождествить с однородным полиномом по импульсам в кокасательном расслоении $T^*\mathcal{Q}$ по правилу

$$\mathbf{K} = (K^{i\ldots j}) \qquad \longleftrightarrow \qquad P_K = K^{i\ldots j} p_i \cdots p_j \,.$$

Для тензора нулевого ранга, т. е. функции f на многообразии $\mathcal{Q}$, положим $P_f \equiv f$, где f — каноническое поднятие функции с $\mathcal{Q}$ на $T^*\mathcal{Q}$.

Тензором Киллинга $\mathbf{K}$ ранга ℓ называется симметрический $(\ell, 0)$ тензор в пространстве $\mathcal{Q}$, удовлетворяющий тензорному уравнению Киллинга

$$[\mathbf{K}, \mathbf{G}] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{P_K, P_G\} = 0 \,. \tag{2.2}$$

Согласно определению, P_K является интегралом движения для геодезического потока на римановом многообразии $\mathcal{Q}$.

Конформным тензором Киллинга $\mathbf{L}$ ранга ℓ называется симметрический

$(\ell, 0)$ тензор в пространстве $\mathcal{Q}$, удовлетворяющий тензорному уравнению

$$\{P_L, P_G\} = cP_G\,. \tag{2.3}$$

Если $\mathbf{K}$ — тензор Киллинга, то тензор $\mathbf{L} = \mathbf{K} + f(q)\mathbf{G}$ является конформным тензором Киллинга. В этом случае

$$c = \nabla f \equiv \mathrm{g}^{ij} p_j \partial_i f\,,$$

и, поэтому, $\mathbf{L}$ называют тензором градиентного типа, а f называют потенциалом.

Конформный тензор $\mathbf{L}$ с взаимно простыми собственными значениями, для которого кручение Нийенхейса равно нулю

$$T^m_{ij} \equiv 2L^\alpha_i \partial_\alpha L^m_j - 2L^m_\alpha \partial_i L^\alpha_j = 0\,,$$

называют L-тензором или тензором Бененти. Потенциал L-тензора равен его следу, т. е. $f = \sigma_1 \equiv \mathrm{trace}(\mathbf{L})$.

Связь между теорией тензоров Киллинга и теорией интегрируемых систем установлена в работах [18, 30, 60, 89] и может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 4. *Уравнение Гамильтона-Якоби (1.2) допускает разделение переменных в ортогональной системе криволинейных координат тогда и только тогда, когда существует тензор Киллинга* $\mathbf{K}$ *второго ранга с простыми собственными значениями и нормальными собственными векторами такой, что*

$$d(\mathbf{K}dV) = 0\,. \tag{2.4}$$

Здесь d *— внешняя производная.*

Эквивалентность условия (2.4) и возможности разделения переменных объясняется тем, что, будучи записанным в координатном виде с использованием переменных разделения, вместе с условием на существование тензора Киллинга (2.2) оно сводится к исходным уравнениям Леви-Чивита (1.7, 1.10).

Тензор $\mathbf{K}$, заданный уравнением (2.4), называется характеристическим тензором системы и определяется выбором кинетической энергии системы T, т. е. метрики риманова многообразия. Собственные векторы характеристического тензора порождают ортогональное расслоение многообразия $\mathcal{Q}$ на гиперповерхности, т. е. подмногообразия единичной размерности, называющееся вебом Штеккеля. Существование тензора $\mathbf{K}$ эквивалентно существованию семейства n тензоров Киллинга $\mathbf{K}_m$ с простыми собственными значениями и нормальными собственными векторами, находящихся в инволюции относительно соответствующих скобок Пуассона. Такие тензоры $\mathbf{K}_m$ образуют линейное пространство, называющееся пространством Киллинга–Штеккеля.

Конструктивная рекуррентная процедура, с помощью которой такое пространство Киллинга–Штеккеля может быть построено, была предложена Бененти [18].

Теорема 5. *Если $\mathbf{L}$ является L-тензором на римановом многообразии $\mathcal{Q}$, то n тензоров*

$$\mathbf{K}_m = \sum_{k=0}^{m} \sigma_{m-k}\mathbf{L}^k, \qquad \text{или} \qquad \mathbf{K}_m = \sigma_m \mathbf{G} - \mathbf{K}_{m-1}\mathbf{L}\,, \qquad m = 0, \ldots, n-1, \tag{2.5}$$

являются (2,0) тензорами Киллинга второго ранга с простыми собственными значениями и нормальными собственными векторами, которые попарно коммутируют друг с другом.

Здесь функции σ_m являются коэффициентами характеристического полинома $\det(\lambda \mathrm{I} - \mathbf{L}) = \sum_{m=0}^{n} \sigma_m \lambda^{n-m}$ тензора $\mathbf{L}$.

Используя уравнение $d(\mathbf{K}dV) = 0$, по заданной кинетической энергии T (то есть метрике данного риманова многообразия) можно найти семейство потенциалов V, при добавлении которых к кинетической энергии T получившаяся система допускает разделение переменных [30, 60, 79]. Из уравнения $d(\mathbf{K}dV) = 0$ следует, что $d(\mathbf{K}_m dV) = 0$ для любого m, поэтому, согласно [18], можно ввести семейство потенциалов V_m, являющихся решениями уравнений

$$dV_m = \mathbf{K}_m dV, \qquad m = 1, \ldots, n-1, \tag{2.6}$$

и определить интегралы движения

$$H_m = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{K}_m^{ij}(q) p_i p_j + V_m(q), \qquad m = 1, \ldots, n-1, \tag{2.7}$$

которые образуют семейство интегралов движения в инволюции для заданного оператора Гамильтона H (1.1).

В работе [52] показано, что интегралы движения H_m (2.7) также можно найти, решив рекуррентные уравнения

$$dH_{m+1} = \mathbf{N}^* dH_m + \sigma_{m+1} dH, \qquad m = 1, \ldots, n-1, \qquad H_n \equiv 0\,. \tag{2.8}$$

Здесь $\mathbf{N}$ — оператор рекурсии, который является каноническим поднятием тензора $\mathbf{L}$ на кокасательное расслоение $T^*\mathcal{Q}$ по правилу

$$\mathbf{N}\,\frac{\partial}{\partial q^k} = \sum_{i=1}^{n} L_k^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{ij} p_j \left(\frac{\partial L_i^j}{\partial q^k} - \frac{\partial L_k^j}{\partial q^i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i}, \qquad \mathbf{N}\,\frac{\partial}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^{n} L_i^k \frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{2.9}$$

Оператор рекурсии $\mathbf{N}$ обладает тождественно равным нулю кручением Нийенхейса вследствие совместимости двух пар скобок Пуассона для заданной бигамильтоновой системы, более подробное обсуждение связи свойств системы со свойствами особого симплектического ωN-многообразия представлено в работе [34]. Существование двух пар скобок Пуассона для системы также связано [3, 10] с возможностью представления интегрируемой системы в виде L-A-пары со спектральным параметром.

Построение тензоров Киллинга $\mathbf{K}_m$ и соответствующих интегралов движения H_m тесно связано с разделением переменных, согласно следующей теореме.

Теорема 6. *Собственные значения Q_i тензора* $\mathbf{L}$ *являются переменными разделения для интегрируемой системы с интегралами движения H_m.*

Интегрируемые системы, допускающие разделение в этих переменных, называют L-системами, или системами Бененти.

Замечание: Стоит подчеркнуть, что L-системы не исчерпывают всего множества систем Штеккеля, допускающих разделение переменных в ортогональной системе криволинейных координат на римановом многообразии $\mathcal{Q}$. Например, конические координаты не являются нормальными координатами для какого-либо тензора $\mathbf{L}$. Для рассмотрения подобных координатных систем используют понятие пучка L-тензоров [19, 79].

Замечание: Согласно [84], (1,1)-тензор $\mathbf{Q}(\mu)$ =cof$(\mathbf{L}-\mu G)$ является полиномом степени $n-1$ по μ, коэффициенты которого с точностью до знака совпадают с тензорами $\mathbf{K}_m$ (2.5). Напомним, что cof$(\mathbf{A})$ определен следующим образом

$$\mathrm{cof}(\mathbf{A})\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}\mathrm{cof}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{G}.$$

В силу этого системы с пространством Киллинга-Штеккеля вида (2.5) и называют системами кофакторного типа.

2.1. Метод построения переменных разделения

Для заданного гамильтониана H (1.1) в рассмотренном выше методе построения переменных разделения Q_i необходимо найти тензор Киллинга $\mathbf{L}$ и нетривиальные решения уравнений $d(\mathbf{K}dV)=0$ или (2.6, 2.8).

Для создания прямого метода построения переменных разделения условие существования тензора Киллинга $\mathbf{L}$ необходимо также представить в виде условия существования нетривиального решения некоторого уравнения. Искомое уравнение построено в работе [25], в которой доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Тензор* $\mathbf{L}$ *является симметрическим тензором Киллинга градиентного типа с нулевым кручением и простыми собственными значениями относительно метрического тензора* $\mathbf{G}$, *если и только если*

$$d(\mathcal{L}_{X_T}\theta - T d\sigma_1) = 0. \tag{2.10}$$

Здесь $\mathcal{L}$ *— производная Ли вдоль геодезического векторного поля* X_T, $\sigma_1 = \operatorname{tr}\mathbf{L}$ *— симметрический полином первой степени и*

$$\theta = \sum_{i,j=1}^{n} L^i_j\, p_i dq^j \tag{2.11}$$

является L*-деформацией стандартной 1-формы Лиувилля* $\theta_0 = \sum p_j dq^j$, *которая не зависит от выбора координатной системы.*

После подстановки тензора Киллинга $\mathbf{K}_1$ (2.5) в уравнение $d(\mathbf{K}dV) = 0$ получается уравнение, которое по своей структуре аналогично уравнению (2.10):

$$d(\mathcal{L}_{X_V}\theta - V d\sigma_1) = 0\,. \tag{2.12}$$

Доказательство может быть найдено, например, в работе [17].

Для того, чтобы уменьшить количество промежуточных вычислений, используется следующее выражение для производной Ли $\mathcal{L}$ вдоль векторного поля X:

$$\mathcal{L}_X = \mathtt{i}_X\, d + d\, \mathtt{i}_X\,.$$

Здесь $\mathtt{i}_X$ — внутренняя производная и d — внешняя производная. Так как $d^2 = 0$, то

$$d\mathcal{L}_X = d\,\mathtt{i}_X\, d + d^2\, \mathtt{i}_X = d\,\mathtt{i}_X\, d,$$

и после подстановки этого выражения в уравнения (2.10, 2.12) они принимают вид

$$d(\mathtt{i}_{X_T} d\theta - T d\sigma_1) \;=\; 0, \tag{2.13}$$

$$d(\mathtt{i}_{X_V} d\theta - V d\sigma_1) \;=\; 0\,. \tag{2.14}$$

После раскрытия скобок и приведения коэффициентов перед мономами эти уравнения сводятся к системе дифференциальные уравнений в частных производных на компоненты тензора $\mathbf{L}$.

Итак, метод построения переменных разделения Q для заданной L-системы сводится к нахождению нетривиальных решений уравнений (2.13) и (2.14) относительно функций $L^i_j(q)$ на римановом многообразии $\mathcal{Q}$ и нахождению собственных значений тензора $\mathbf{L}$. В этом методе для построения переменных разделения вместо неизвестного вектора f (1.8) на римановом многообразии $\mathcal{Q}$, неявно входящего в исходные уравнения (1.10), ищется тензор Киллинга $\mathbf{L}$ второго рода со специальными свойствами.

После нахождения тензора $\mathbf{L}$ и его собственных значений сразу можно построить оператор рекурсии $\mathbf{N}$ (2.9) и, решив рекуррентную систему уравнений (2.7), найти интегралы движения системы H_m.

В следующем разделе представлены результаты реализации данного метода для построения L-тензоров и соответствующих переменных разделения для L-систем.

Замечание: Если для данного гамильтониана уравнения (2.13–2.14) не имеют решения или решение тривиально, то это означает, что данная интегрируемая система не является L-системой. Отсутствие решения вовсе не означает, что система не допускает разделения переменных.

Замечание: Вторая дифференциальная 1-форма θ естественным образом порождает вторую пуассонову структуру на многообразии $T^*\mathcal{Q}$ [17, 52]. Соответствующий оператор рекурсии $\mathbf{N}$ (2.9) является каноническим поднятием тензора $\mathbf{L}$ на кокасательное расслоение $T^*\mathcal{Q}$. В силу этого предложенный алгоритм можно рассматривать как часть более общего алгоритма нахождения переменных разделения для бигамильтоновых интегрируемых систем.

2.2. Результаты применения бигамильтонова подхода к интегрируемым системам

Результатом исследования данного метода стала программа, реализованная в системе символьных вычислений Maple и позволяющая в значительной степени автоматизировать процесс построения переменных разделения и интегралов движения. Результатом работы программы является построение переменных разделения и интегралов движения для данной L-системы, а также вычисление конформного тензора Киллинга $\mathbf{L}$ и оператора рекурсии $\mathbf{N}$. Некоторые примеры исследованных систем приведены в работе [42].

Пример 1. Система Неймана описывает движение частицы по сфере S_N под действием квадратичного потенциала

$$V(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i^2 \qquad , \text{где} \qquad \alpha_i \neq \alpha_j\,. \tag{2.15}$$

В 1859 году Нейманом было показано [74], что в естественном случае при $N = 2$ уравнения движения могут быть найдены при помощи теории разделения переменных Якоби. Этот результат был обобщён на случай произвольного N Мозером, который ввёл сфероконические координаты, определяемые следующим образом: для вещественных $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{N+1}$ и ненулевых $x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}$ сфероконические координаты задаются как решения уравнения

$$\sum_{i=1}^{N+1} \frac{x_i^2}{\lambda - \alpha_i} = 0\,. \tag{2.16}$$

После того, как такие координаты введены, нетрудно проверить, что они действительно являются переменными разделения, однако методы поиска таких переменных появились только недавно. Программа, созданная в рамках этой работы, позволила найти эти координаты достаточно строгим алгоритмическим путём.

Вид ограничений на движение частицы $\sum x_i^2 = 1$ подсказывает замену переменных $q_i = x_i^2$, где $i = 1, \ldots, N$. После такой замены, приводящей квадратичную по координатам связь $\sum x_i^2 = 1$ к линейной, гамильтониан H принимает вид $H = T + V$, где

$$T = 2\sum_a X_a(1 - X_a)Y_a^2 - 4\sum_{a<b} X_a X_b Y_a Y_b\,, \tag{2.17}$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_a (\alpha_a - \alpha_{N+1})X_a\,. \tag{2.18}$$

Здесь и далее приведены результаты работы написанной автором программы для системы символьных вычислений Maple, доступной по адресу `http://www.maplesoft.com/applications/view.aspx?SID=1470`.

Уравнения (2.13,2.14) сводятся к системе дифференциальных уравнений в частных производных, решая которую в Maple, можно вычислить компоненты тензора **L**

$$L = \begin{bmatrix} q1\ a3 + a1 - q1\ a1 & (-a2 + a3)\, q1 \\ -q2\,(a1 - a3) & -q2\ a2 + q2\ a3 + a2 \end{bmatrix}$$

и найти его собственные значения – переменные разделения

$$\begin{aligned} Q1 = {} & -\frac{q2\ a2}{2} + \frac{q2\ a3}{2} + \frac{a2}{2} + \frac{q1\ a3}{2} + \frac{a1}{2} - \frac{q1\ a1}{2} + (a2^2\, q2^2 + a3^2\, q2^2 \\ & + a1^2 + a2^2 - 2\, a2\, q2^2\, a3 + 2\, a2\ q2\ a1 - 2\, a3\ q2\ a1 + 2\, a3\ q2\ a2 \\ & + 2\, a3^2\, q2\ q1 - 2\, a2\ q2\ a3\ q1 - 2\, a3\ q2\ a1\ q1 - 2\, a1^2\, q1 - 2\, a1\ a2 \\ & + a1^2\, q1^2 + a3^2\, q1^2 + 2\, a2\ q2\ a1\ q1 - 2\, a2^2\, q2 + 2\, a1\ a3\ q1 \\ & + 2\, a1\ q1\ a2 - 2\, a1\ q1^2\, a3 - 2\, a2\ a3\ q1)^{(1/2)}\,/2, \end{aligned}$$

$$Q2 = -\frac{q2\ a2}{2} + \frac{q2\ a3}{2} + \frac{a2}{2} + \frac{q1\ a3}{2} + \frac{a1}{2} - \frac{q1\ a1}{2} - (a2^2\ q2^2 + a3^2\ q2^2$$
$$+ a1^2 + a2^2 - 2\ a2\ q2^2\ a3 + 2\ a2\ q2\ a1 - 2\ a3\ q2\ a1 + 2\ a3\ q2\ a2$$
$$+ 2\ a3^2\ q2\ q1 - 2\ a2\ q2\ a3\ q1 - 2\ a3\ q2\ a1\ q1 - 2\ a1^2\ q1 - 2\ a1\ a2$$
$$+ a1^2\ q1^2 + a3^2\ q1^2 + 2\ a2\ q2\ a1\ q1 - 2\ a2^2\ q2 + 2\ a1\ a3\ q1$$
$$+ 2\ a1\ q1\ a2 - 2\ a1\ q1^2\ a3 - 2\ a2\ a3\ q1)^{(1/2)}/2.$$

Несложно проверить, что эти новые переменные являются сфероконическими координатами, введёнными Мозером (2.16).

Вычисление оператора рекурсии $\mathbf{N}$ (2.9)

$$N = \begin{bmatrix} (a3 - a1)q1 + a1 & (a3 - a2)q1 & 0 & 0 \\ (a3 - a1)q2 & (a3 - a2)q2 + a2 & 0 & 0 \\ 0 & p1(a2 - a3) + p2(a3 - a1) & (a3 - a1)q1 + a1 & (a3 - a1)q2 \\ p1(a3 - a2) + p2(a1 - a3) & 0 & (a3 - a2)q1 & (a3 - a2)q2 + a2 \end{bmatrix}$$

даёт возможность построить второй интеграл движения

$$H_1 = -2\ q1^2\ p1^2\ a2 - 2\ q1\ p1^2\ q2\ a2 + 2\ q1\ p1^2\ q2\ a3 + 2\ q1\ a2\ p1^2$$
$$- 4\ q1\ a3\ q2\ p2\ p1 - 2\ q2^2\ p2^2\ a1 + 2\ q2\ p2^2\ q1\ a3 + 2\ q2\ a1\ p2^2$$
$$- 2\ q2\ p2^2\ q1\ a1 + \frac{a1\ q1\ a2}{2} - \frac{a2\ a3\ q1}{2} + \frac{a2\ q2\ a1}{2} - \frac{a3\ q2\ a1}{2} + \_C1.$$

Пример 2. Система Холта задаётся функцией Гамильтона

$$H(x) = \frac{1}{2}({p_X}^2 + {p_Y}^2) + aX^{-\frac{2}{3}}(\frac{3b}{4}X^2 + Y^2 + c). \tag{2.19}$$

Для неё известны только три интегрируемых случая [50, 77]: $b = 1$, $b = 6$ и $b = 16$, значения параметров a и c произвольные.

Система Холта не является L-системой, но может быть сведена к таковой неточечным преобразованием координат. Применение к системе масштабного преобразования [93]

$$a \to 4(\frac{3}{2})^{1/3}a, \qquad c \to \frac{c}{3a}$$

и замены переменных [46]

$$X = \frac{2}{3}x^{3/2}, \qquad p_X = p_x/\sqrt{x}, \qquad Y = -\frac{1}{2\sqrt{3a}}p_y, \qquad p_Y = 2\sqrt{3a}y \tag{2.20}$$

сводит гамильтониан системы к

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2x} + 2a(bx^2 + 3y^2) + \frac{2c}{x} \tag{2.21}$$

и позволяет применить к ней описанный метод разделения переменных.

Решая уравнения (2.13,2.14), удаётся найти два решения, отвечающие случаям $b = 1$ и $b = 6$, получив для них тензоры $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}$, переменные разделения и интегралы движения.

Для случая $b = 1$

$$L = \begin{bmatrix} \_C1\; q2 + \_C2 & \_C1\; q1 \\ \_C1\; q1 & \_C1\; q2 + \_C2 \end{bmatrix}$$

$$Q1 = \_C2 + \_C1\; q1 + \_C1\; q2$$

$$Q2 = \_C2 - \_C1\; q1 + \_C1\; q2$$

Для случая $b = 6$

$$L = \begin{bmatrix} (4\, q1^2 + q2^2)\, \_C2 + \_C1 & 2\, \_C2\; q2\; q1 \\ 2\, \_C2\; q2\; q1 & \_C1 + \_C2\; q2^2 \end{bmatrix}$$

$$Q1 = \_C1 + \_C2\; q2^2 + 2\, \_C2\; q1^2 + 2\sqrt{\_C2^2\, q2^2\, q1^2 + \_C2^2\, q1^4}$$

$$Q2 = \_C1 + \_C2\; q2^2 + 2\, \_C2\; q1^2 - 2\sqrt{\_C2^2\, q2^2\, q1^2 + \_C2^2\, q1^4}$$

Результаты, полученные в используемых координатах, несложно перевести в исходные координаты заменой переменных, обратной (2.20).

Результаты данной главы опубликованы в работах [5, 6, 42, 43]. Основным результатом явилось создание практической реализации метода разделения переменных для многих интегрируемых систем в среде символьных вычислений Maple. Вычисления на современном компьютере занимают менее минуты, основная часть времени уходит на решение переопределённой системы уравнений в частных производных. Программное обеспечение доступно для свободного скачивания с портала Maplesoft Application Center. Реализованный алгоритм применим только к L-системам, для общего же случая произвольных интегрируемых систем с гамильтонианом натурального вида подобного метода пока не существует.

Глава 3

Построение суперинтегрируемых систем с использованием теорем сложения

3.1. Алгебраические интегралы для уравнений Абеля

В классической механике суперинтегрируемой системой с N степенями свободы называется система, обладающая более чем N функционально независимыми интегралами движения, определёнными однозначно на всём $2N$-мерном фазовом пространстве. В частности, если число интегралов составляет $2N-1$, то система называется максимально суперинтегрируемой. Динамика таких систем особенно интересна тем, что все траектории являются замкнутыми и периодическими [9, 20]. С математической точки зрения в этом случае фазовое пространство имеет топологически структуру дуальной пары, состоящей из инвариантного слоения Лиувилля-Арнольда лагранжевыми торами и (коизотропного) полярного слоения [73].

В квантовой механике Зоммерфельд и Бор первыми обратили внимание на то, что системы, допускающие разделение переменных более чем в одной системе координат, могут иметь дополнительные интегралы движения. Суперинтегрируемым системам свойственно дополнительное вырождение уровней энергии, от которого можно избавиться, приняв во внимание квантовые числа, соответствующие дополнительным интегралам движения; некоторая часть спектра может быть вычислена алгебраически, а соответствующие волновые функции являются комбинациями классических ортогональных полиномов. Один из лучших примеров такого рода — гармонический осциллятор и задача Кеплера-Кулона. В последние годы было опубликовано большое число работ, посвящённых суперинтегрируемости; в большинстве из них рассматриваются интегралы движения второго порядка и классификация систем с такими интегралами (новые результаты и ссылки на дополнительную литературу могут быть найдены в работах [16, 22, 27, 33, 36, 41, 51, 58, 83, 96, 97]).

Систематическое исследование суперинтегрируемых систем началось с найденного Эйлером в 1761 году алгебраического интеграла для дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathrm{x}_1}{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}} \pm \frac{d\mathrm{x}_2}{\sqrt{f(\mathrm{x}_2)}} = 0,$$

где f — произвольный полином четвертой степени [32]. Классификация соответствующих двумерных суперинтегрируемых систем типа Штеккеля была построена в работе [41].

Эйлер показал, что дифференциальное уравнение

$$\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{X}} + \frac{\mathrm{dy}}{\sqrt{Y}} = 0, \tag{3.1}$$

связывающее функцию четвёртого порядка переменной x в самом общем виде

$$X = a\mathrm{x}^4 + 4b\mathrm{x}^3 + 6c\mathrm{x}^2 + 4d\mathrm{x} + e \tag{3.2}$$

и такую же функцию Y другой переменной y, требует выполнения алгебраического уравнения, связывающего x, y, X и Y

$$\left(\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{\mathrm{x} - \mathrm{y}}\right)^2 = a(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2 + 4b(\mathrm{x}+\mathrm{y}) + C, \tag{3.3}$$

где C — произвольная константа интегрирования. Это алгебраическое уравнение после упрощения порождает симметричную биквадратную форму от x и y

$$F(\mathrm{x},\mathrm{y}) = a\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2 + 2b\mathrm{xy}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) + c(\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{xy} + \mathrm{y}^2) + 2d(\mathrm{x}+\mathrm{y}) + e = 0, \tag{3.4}$$

задающую коническое сечение на плоскости (x,y), являющееся классической траекторией движения в конфигурационном пространстве.

В соответствии с [40], константу C в уравнении (3.3) можно заменить на $4c + 4s$, где

$$s = \frac{F(\mathrm{x},\mathrm{y}) - \sqrt{X}\sqrt{Y}}{2(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{\mathrm{x}-\mathrm{y}}\right)^2 - \frac{a(\mathrm{x}+\mathrm{y})^2}{4} - b(\mathrm{x}+\mathrm{y}) - c \quad (3.5)$$

является интегралом Эйлера. Рассматривая s как функцию независимых переменных x и y, получаем следующую теорему сложения:

$$\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{X}} + \frac{\mathrm{dy}}{\sqrt{Y}} + \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{S}} = 0. \quad (3.6)$$

Теорема сложения Эйлера является частным случаем теоремы Абеля [40].

Полином S в уравнении (3.6) можно записать в алгебраической форме

$$\sqrt{S} = \frac{\Big(Y_1\mathrm{x} + Y_2)\sqrt{X} - \Big(X_1\mathrm{y} + X_2\Big)\sqrt{Y}}{(\mathrm{x}-\mathrm{y})^3}, \quad (3.7)$$

где

$$X_1 = a\mathrm{x}^3 + 3b\mathrm{x}^2 + 3c\mathrm{x} + d, \qquad X_2 = b\mathrm{x}^3 + 3c\mathrm{x}^2 + 3d\mathrm{x} + e,$$

и аналогично для $Y_{1,2}$, или в форме Вейерштрасса

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3, \quad (3.8)$$

где

$$g_2 = ae - 4bd + 3c^2, \qquad g_3 = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3. \quad (3.9)$$

Меняя знак $\sqrt{Y}$, получаем, что

$$s = \frac{F(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \sqrt{X}\sqrt{Y}}{2(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2} \quad (3.10)$$

приводит к другому дифференциальному уравнению

$$\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{X}} - \frac{\mathrm{dy}}{\sqrt{Y}} + \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{S}} = 0. \quad (3.11)$$

Данные уравнения можно переписать в более элегантном виде, предложенном Клейном [40], если ввести однородные переменные $\mathrm{x}_{1,2}$ и $\mathrm{y}_{1,2}$, заменив x на $\mathrm{x}_1/\mathrm{x}_2$ и y на $\mathrm{y}_1/\mathrm{y}_2$.

В общем случае дифференциальные уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{x}_i^k\, d\mathrm{x}_i}{\sqrt{X_i}} = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, n-2,$$

связывающие полиномы

$$X_i = a_{2n}\mathrm{x}_i^{2n} + a_{2n-1}\mathrm{x}_i^{2n-1} + \dots + a_1\mathrm{x}_i + a_0$$

от переменных x_i, обладают следующим дополнительным интегралом:

$$s = \mathrm{x}_1^2 \dots \mathrm{x}_n^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{X_i}}{\mathrm{x}_i^2\, F'(\mathrm{x}_i)} \right)^2 - a_1 \left(\frac{1}{\mathrm{x}_1} + \dots + \frac{1}{\mathrm{x}_n} \right) - a_0 \left(\frac{1}{\mathrm{x}_1} + \dots + \frac{1}{\mathrm{x}_n} \right)^2,$$

где $F(\mathrm{x}) = \prod(\mathrm{x} - \mathrm{x}_j)$. Этот дополнительный интеграл был получен в работе [82]. В случае $n = 2$ он связан с интегралом Эйлера (3.5), а при $n > 2$ можно получить целое семейство таких функционально независимых дополнительных интегралов [82, 102].

3.2. Классификация суперинтегрируемых систем типа Эйлера

Для построения суперинтегрируемой штеккелевской системы на основе теорем сложения Эйлера (3.6) и (3.11) рассмотрим гиперэллиптическую кривую

$$\mu^2 = P(\lambda), \qquad \text{где} \qquad P(\mathrm{x}) = X,$$

и пару произвольных замен переменных

$$\lambda_j = v_j(q_j), \qquad \mu_j = u_j(q_j)p_j, \qquad j = 1, 2,$$

где p и q — канонические переменные $\{p_j, q_i\} = \delta_{ij}$.

Применив замены переменных к гиперэллиптической кривой, получим пару разделённых уравнений

$$p_j^2\, u_j^2(q_j) = a v_j(q_j)^4 + 4b v_j(q_j)^3 + 6c v_j(q_j)^2 + 4d v_j(q_j) + e, \qquad j = 1, 2, \quad (3.12)$$

где коэффициенты a, b, c, d и e полинома четвёртой степени X (3.2) — линейные функции интегралов движения $H_{1,2}$:

$$a = \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha, \qquad b = \beta_1 H_1 + \beta_2 H_2 + \beta, \quad \ldots, \quad e = \epsilon_1 H_1 + \epsilon_2 H_2 + \epsilon.$$

Эти разделённые уравнения (3.12) имеют вид уравнений Якоби, записанных для систем типа Штеккеля [89, 92, 94]

$$p_j = \sqrt{\sum_{k=1}^{2} H_k \mathbf{S}_{kj} + U_j(q_j)}\,, \tag{3.13}$$

где $\mathbf{S}$ — матрица Штеккеля, и U_j — потенциал:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{ij} &= u_j^{-2}(\alpha_i v_j^4 + 4\beta_i v_1^3 + 6\gamma_i v_j^2 + 4\delta_i v_j + \epsilon_i), \\ U_j &= u_j^{-2}(\alpha v_j^4 + 4\beta v_1^3 + 6\gamma v_j^2 + 4\delta v_j + \epsilon). \end{aligned} \qquad i, j = 1, 2.$$

Решая эти разделённые уравнения (3.12-3.13) относительно $H_{1,2}$, можно получить пару штеккелевских интегралов движения в инволюции

$$H_k = \sum_{j=1}^{2} (S^{-1})_{jk} \Big(p_j^2 - U_j(q_j)\Big)\,, \qquad k = 1, 2, \tag{3.14}$$

и переменные-угол

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \int \frac{\mathbf{S}_{ij}\,\mathrm{d}q_j}{p_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \int \frac{\mathbf{S}_{ij}\,\mathrm{d}q_j}{\sqrt{\sum_{k=1}^{2} H_k S_{kj} + U_j(q_j)}}\,, \tag{3.15}$$

канонически сопряжённые переменным-действие $H_{1,2}$

$$\{H_1, H_2\} = \{\omega_1, \omega_2\} = 0, \qquad \{H_i, \omega_j\} = \delta_{ij}. \tag{3.16}$$

В общем случае переменные-действие (3.15) являются суммой многозначных функций. Тем не менее, применение какой-либо теоремы сложения при вычислении ω_2

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \int^{v_1(q_1)} \frac{\mathbf{S}_{21}(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{P(\lambda)}} + \frac{1}{2} \int^{v_2(q_2)} \frac{\mathbf{S}_{22}(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{\sqrt{P(\lambda)}} = \frac{1}{2} \int^{s} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{S}}$$

позволяет получить дополнительные однозначные интегралы движения s и S:

$$\{H_1,\omega_2\}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \{H_1,s\}=\{H_1,S\}=0\,.$$

Применяя теорему сложения при вычислении переменной-угол ω_2 и дополнительных однозначных интегралов движения s и S, мы естественным образом накладываем ограничение на функцию четвёртого порядка $P(\lambda)$ и замены переменных $\lambda_j=v_j(q_j),\quad \mu_j=u_j(q_j)p_j$.

Например, чтобы использовать теоремы сложения Эйлера (3.6) и (3.11), оказывается необходимым положить

$$\mathbf{S}_{21}(\lambda)=1, \qquad \mathbf{S}_{22}(\lambda)=\pm 1.$$

Поскольку

$$\mathbf{S}_{ij}(q)=\frac{v_j'(q_j)}{u_j(q_j)}\mathbf{S}_{ij}(\lambda)\,,$$

то эти ограничения приводят к уравнениям

$$\kappa_j u_j v_j'=\alpha_2 v_j^4+4\beta_2 v_j^3+6\gamma_2 v_j^2+4\delta_2 v_j+\epsilon_2\,, \qquad \kappa_1=1, \quad \kappa_2=\pm 1, \tag{3.17}$$

на функции $u(q),v(q)$ и коэффициенты $\alpha_2,\beta_2,\ldots,\epsilon_2$ квартики, так как уравнения становится необходимым решать в фиксированном функциональном пространстве [96].

Существует всего пять одночленных решений

$$\begin{array}{lllll}
\mathrm{I} & u_j=1, & v_j=q_j, & \epsilon_2\neq 0, \\[2em]
\mathrm{II} & u_j=q_j, & v_j=q_j^{4\delta_2\kappa_j^{-1}}, & \delta_2\neq 0, \\[2em]
\mathrm{III} & u_j=1, & v_j=q_j^{-1}, & \gamma_2\neq 0, \\[2em]
\mathrm{IV} & u_j=q_j^{-1}, & v_j=q_j^{-1}, & \beta_2\neq 0, \\[2em]
\mathrm{V} & u_j=q_j^{-2}, & v_j=q_j^{-1}, & \alpha_2\neq 0,
\end{array} \tag{3.18}$$

с точностью до канонических преобразований переменных разделения (p_j, q_j) и преобразований интегралов движения $H_j \to \sigma H_j + \rho$. Здесь под условиями $\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0, \ldots$ подразумевается, что это единственные параметры, не равные нулю.

Наложим дополнительные условия на коэффициенты квартики $P(\lambda)$, потребовав, чтобы после точечного преобразования координат

$$\begin{aligned} &x = z_1(q), && y = z_2(q), \\ &p_x = \mathrm{w}_{11}(q)p_1 + \mathrm{w}_{12}(q)p_2, && p_y = \mathrm{w}_{21}(q)p_1 + \mathrm{w}_{22}(q)p_2, \end{aligned} \tag{3.19}$$

где $\mathrm{w}_{ij} \neq 0$, кинетическая часть функции Гамильтона $H_1 = T + V$ принимала форму

$$T = \sum \left(\mathbf{S}^{-1}\right)_{1j} p_j^2 = \mathrm{g}_{11}(x,y)p_x^2 + \mathrm{g}_{12}(x,y)p_x p_y + \mathrm{g}_{22}(x,y)p_y^2, \tag{3.20}$$

где g — фиксированная метрика на конфигурационном пространстве.

Например, для суперинтегрируемых систем, заданных на комплексном евклидовом пространстве $E_2(\mathbb{C})$

$$T = \sum \left(\mathbf{S}^{-1}\right)_{1j} p_j^2 = p_x p_y,$$

дополнительные ограничения будут представлены алгебраическими уравнениями

$$\mathrm{w}_{11}\mathrm{w}_{21} = \left(\mathbf{S}^{-1}\right)_{11}, \qquad \mathrm{w}_{12}\mathrm{w}_{21} + \mathrm{w}_{11}\mathrm{w}_{22} = 0, \qquad \mathrm{w}_{12}\mathrm{w}_{22} = \left(\mathbf{S}^{-1}\right)_{12} \tag{3.21}$$

и дифференциальными уравнениями в частных производных

$$\{x, p_x\} = \{y, p_y\} = 1, \qquad \{p_x, y\} = \{p_y, x\} = \{p_x, p_y\} = 0, \tag{3.22}$$

которые нужно решать относительно коэффициентов уравнения четвёртого порядка $\alpha_1, \ldots \epsilon_1$ и функций $z_{1,2}(q_1, q_2)$, $\mathrm{w}_{kj}(q_1, q_2)$.

Остальные свободные параметры системы $\alpha, \ldots, \epsilon$ определяют потенциальную часть $V(x, y)$ функции Гамильтона. Поскольку интегралы $H_{1,2}$

определены с точностью до тривиальных сдвигов $H_k \to H_k + \rho_k$, потенциал $V(x, y)$ зависит только от трёх произвольных параметров.

Таким образом, для классификации суперинтегрируемых систем Эйлера на плоскости достаточно найти решения уравнений (3.17,3.21,3.22). Во всех случаях классическая траектория движения задаётся уравнением

$$F\Big(v_1(q_1), v_2(q_2)\Big) = 0,$$

где F выражается формулой (3.4). Дополнительные квадратичные по импульсам интегралы движения имеют вид

$$K_2 = s + c = \frac{F(v_1, v_2) - p_1 u_1 p_2 u_2}{2(v_1 - v_2)^2} + c,$$

где s определяется формулой (3.5), а дополнительный кубический по импульсам интеграл движения равен

$$K_3 = \sqrt{S} \equiv \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}$$

где S определяется формулой (3.7) или (3.8).

3.2.1. Примеры

Построим все суперинтегрируемые системы Эйлера на комплексном евклидовом пространстве $E_2(\mathbb{C})$

$$H_1 = p_x p_y + V(x, y) \tag{3.23}$$

с вещественными потенциалами V. Решая уравнения (3.17,3.21,3.22), получим пять суперинтегрируемых потенциалов

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \alpha(x+y)+\beta(y+3x)x^{-1/2}+\gamma x^{-1/2}\,,\\
V_2 &= \alpha y(x+y^2)+\beta(x+3y^2)+\gamma y\,,\\
V_3 &= \alpha(x+3y)(3x+y)+\beta(x+y)+\frac{\gamma}{(x-y)^2}\\
V_4 &= \alpha xy^{-3}-\beta y^{-2}-\gamma xy,\\
V_5 &= \frac{\alpha}{x^2}+\frac{\beta}{x^{3/2}\sqrt{y-1}}+\frac{\gamma}{x^{1/2}\sqrt{y-1}}.
\end{aligned}
$$

Стоит отметить, что все эти системы были неявно получены Эйлером в работе, опубликованной в 1761 году [32]. Потенциалы V_1 и V_3 в явном виде были найдены Драшем [28] — это системы Драша (ℓ) и (g), а потенциалы V_2, V_4 и V_5 были получены в работе [57], случаи E_{10}, E_8 и E_{17}, соответственно.

Потенциалы $V_{1,2}$ можно получить, использовав первое и пятое решения (3.18) уравнений (3.17). Второе и четвёртое решения соответствуют потенциалу V_3, а третье решение соответствует потенциалам $V_{4,5}$. Далее способ построения этих систем рассмотрен более подробно.

Пример 1. Используя первое решение (3.18)

$$
u_j=\pm 1,\quad v_j=\pm q_j,\qquad\Rightarrow\qquad p_1^2=P(q_1),\quad (-p_2)^2=P(-q_2)
$$

и квартику

$$
P(\lambda)=-\frac{\alpha}{2}\lambda^4+2\beta\lambda^3+H_1\lambda^2+2\gamma\lambda+H_2,
$$

получим интегралы Штеккеля

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \frac{p_1^2 - p_2^2}{q_1^2 - q_2^2} + \frac{\alpha(q_1^2 + q_2^2)}{2} - \frac{2\beta(q_1^2 - q_1q_2 + q_2^2) + 2\gamma}{q_1 - q_2}, \\
H_2 &= \frac{p_2^2q_1^2 - p_1^2q_2^2}{q_1^2 - q_2^2} - \frac{\alpha q_1^2 q_2^2}{2} + \frac{(2\beta q_1q_2 + 2\gamma)q_1q_2}{q_1 - q_2},
\end{aligned}
$$

при этом вторая переменная-действие примет вид

$$
\omega_2 = \frac{1}{2}\int^{q_1} \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{X}} - \frac{1}{2}\int^{-q_2} \frac{\mathrm{dy}}{\sqrt{Y}} = -\frac{1}{2}\int^{s} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{S}}.
$$

Используя теорему сложения (3.11), получим дополнительный квадратичный по импульсам интеграл движения

$$
K_2 = s + c = \frac{1}{4}\left(\frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}\right)^2 + \frac{1}{8}\alpha(q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2}\beta(q_1 - q_2)
$$

и дополнительный кубический интеграл (3.7)

$$
\begin{aligned}
K_3 = \sqrt{S} = \ & - \ \frac{(p_1 + p_2)^2(p_1q_2 - p_2q_1)}{2(q_1 + q_2)^3(q_1 - q_2)} - \frac{\alpha(q_1 - q_2)(p_1q_2 - p_2q_1)}{4(q_1 + q_2)} + \frac{\gamma(p_1 + p_2)}{2(q_1^2 - q_2^2)} \\
& - \ \frac{\beta(p_1q_2^2 - 2p_1q_1q_2 - 2p_2q_1q_2 + p_2q_1^2)}{2(q_1^2 - q_2^2)}.
\end{aligned}
$$

Осуществив замену переменных

$$
x = \frac{(q_1 - q_2)^2}{4}, \quad p_x = p_1 - p_2 q_1 - q_2, \quad y = \frac{(q_1 + q_2)^2}{2}, \quad p_y = \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q2}, \tag{3.24}
$$

получим интегралы Штеккеля

$$
\begin{aligned}
H_1 &= p_x p_y + \alpha(x + y) + \frac{\beta(3x + y)}{\sqrt{x}} + \frac{\gamma}{\sqrt{x}}, \\
H_2 &= (p_x - p_y)(p_x x - p_y y) - \frac{\alpha(x - y)^2}{2} - \frac{\beta(x - y)^2}{\sqrt{x}} + \frac{\gamma(x - y)}{\sqrt{x}},
\end{aligned}
$$

интегралы Эйлера

$$
\begin{aligned}
K_2 &= s + c = \frac{p_y^2}{4} + \frac{\alpha x}{2} + \beta\sqrt{x}, \\
K_3 &= \sqrt{S} = \frac{p_y^2(p_x - p_y)}{4} + \frac{\alpha(p_x - p_y)x}{2} + \frac{\beta(2p_x x - 3p_y x + p_y y)}{4\sqrt{x}} + \frac{\gamma p y}{4\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

и уравнение соответствующей классической траектории движения

$$F(x,y) = \left(x - \frac{y}{3}\right) H_1 + H_2 - \frac{\alpha(x-y)^2}{2} - 2\beta\sqrt{x}\,(x-y) - 2\gamma\sqrt{x} = 0\,.$$

Использование пятой подстановки (3.18) приводит к этой же суперинтегрируемой системе.

Пример 2. Используя первое решение (3.18) и другую квартику

$$P(\lambda) = -\frac{\alpha}{4}\lambda^4 - \beta\lambda^3 - \frac{\gamma}{2}\lambda^2 + H_1\lambda + H_2,$$

после преобразования координат

$$x = \frac{(q_1+q_2)^2}{4}, \quad p_x = \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}, \quad y = \frac{q_1-q_2}{2}, \quad p_y = p_1 - p_2,$$

получим суперинтегрируемую систему Штеккеля

$$\begin{aligned} H_1 &= p_x p_y + \alpha y(x+y^2) + \beta(x+3y^2) + \gamma y, \\ H_2 &= \frac{p_y^2}{4} + p_x^2 x - y p_y p_x + \frac{\alpha(3y^2+x)(x-y^2)}{4} + 2\beta y(x-y^2) + \frac{\gamma}{2}(x-y^2), \end{aligned}$$

с квадратичным по импульсам интегралом Эйлера

$$K_2 = s + c = \frac{p_x^2}{4} + \frac{\alpha y^2}{4} + \frac{\beta y}{2}$$

и кубическим интегралом движения

$$K_3 = \sqrt{S} = \frac{p_x^3}{4} + \frac{\alpha\Big(3p_x(x+y^2) - p_y y\Big)}{8} + \frac{\beta(6p_x y - py)}{8} + \frac{\gamma p_x}{8}.$$

Классическая траектория движения задаётся уравнением

$$F(x,y) = H_1 y + H_2 - \frac{\alpha(x-y^2)^2}{4} + \beta y(x-y^2) + \frac{\gamma(x-3y^2)}{6} = 0\,.$$

Эту систему также можно получить, воспользовавшись пятой подстановкой (3.18).

Пример 3. Используя второе решение (3.18)

$$u_j = q_j, \quad v_j = q_j^2, \qquad \Rightarrow \qquad p_1^2 q_1^2 = P(q_1^2), \quad p_2^2 q_2^2 = P(q_2^2)$$

и квартику

$$P(\lambda) = -\alpha\lambda^4 - \frac{\beta}{2}\lambda^3 + H_1\lambda^2 + H_2\lambda + \gamma,$$

после канонических преобразований (3.24) получим суперинтегрируемую систему Штеккеля

$$H_1 = p_x p_y + \alpha(x+3y)(3x+y) + \beta(x+y) + \frac{\gamma}{(x-y)^2},$$

$$H_2 = (p_x - p_y)(p_x x - p_y y) - 2\alpha(x+y)(x-y)^2 - \frac{\beta(x-y)^2}{2} - \frac{2\gamma(x+y)}{(x-y)^2}.$$

Используя теорему сложения (3.6), получим интеграл Эйлера

$$K_2 = s + c = \frac{(p_x+p_y)^2}{16} + \alpha(x+y)^2 + \frac{\beta}{4}(x+y),$$

кубический интеграл

$$\begin{aligned} K_3 = \sqrt{S} \; &= \; \frac{(p_x-p_y)^2(p_x+p_y)}{32} - \frac{\alpha(x-y)\Big(p_x(5x+3y) - (3x+5y)p_y\Big)}{8} \\ &- \; \frac{\beta(p_x-p_y)(x-y)}{16} - \frac{\gamma(p_x+p_y)}{8(x-y)^2}, \end{aligned}$$

и уравнение классической траектории движения

$$F(x,y) = (y^2 + x^2 + \frac{2xy}{3})H_1 + (x+y)H_2 - \alpha(x-y)^4 - \frac{\beta(x+y)(x-y)^2}{2} + \gamma = 0\,.$$

Эта суперинтегрируемая система совпадает с одной из систем Драша, связанной с логарифмическими переменными-угол [96].

Эту систему также можно получить, если воспользоваться четвёртой подстановкой (3.18).

Пример 4. Рассматривая третье решение (3.18)

$$u_j = \pm 1, \quad v_j = \pm q_j^{-1}, \qquad \Rightarrow \qquad p_1^2 = X(q_1^{-1}), \quad p_2^2 = Y(-q_2^{-1})$$

и квартику

$$P(\lambda) = \alpha\lambda^4 - \beta\lambda^3 + H_2\lambda^2 + H_1\lambda - \gamma,$$

после канонического преобразования

$$x = \sqrt{q_1q_2}, \quad p_x = \frac{p_1q_1 + q_2p_2}{\sqrt{q_1q_2}}, \quad y = \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{q_1q_2}}, \quad p_y = \frac{\sqrt{q_1q_2}(p_1q_1 - q_2p_2)}{q1 + q2}$$

получим систему Штеккеля

$$H_1 = p_xp_y + \frac{\alpha y}{x^3} + \frac{\beta}{x^2} + \gamma xy, \qquad H_2 = p_y^2 + \frac{(p_xx - yp_y)^2}{4} - \frac{\alpha(y^2+1)}{x^2} - \frac{\beta y}{x} + \gamma x^2.$$

Воспользовавшись теоремой сложения Эйлера (3.11), получим дополнительный квадратичный по импульсам интеграл Эйлера

$$K_2 = s + C = \frac{(p_xx - yp_y)^2}{16} - \frac{\alpha y^2}{4x^2} - \frac{\beta y}{4x},$$

кубический интеграл движения

$$K_3 = \sqrt{S} = \frac{p_y^2(p_xx - yp_y)}{8} + \frac{\alpha(3yp_y + xp_x)}{8x^2} + \frac{\beta p_y}{4x} + \frac{\gamma(p_xx - yp_y)x^2}{8}$$

и уравнение траектории движения

$$F(x,y) = -\frac{H_1y}{2x} + \frac{H_2(y^2-2)}{6x^2} + \frac{\alpha}{x^4} - \frac{\beta y}{2x^3} - \gamma = 0\,.$$

Пример 5. Снова используя третье решение (3.18) и другую квартику

$$P(\lambda) = 4\alpha\lambda^4 + 4\beta\lambda^3 + H_2\lambda^2 + 2\gamma\lambda + H_1,$$

после замены

$$x = \frac{q_1q_2}{2}, \quad p_x = \frac{p_1q_1 + q_2p_2}{q_1q_2}, \quad y = \frac{q_1^2 + q_2^2}{2q_1q_2}, \quad p_y = \frac{q_1q_2(p_1q_1 - q_2p_2)}{q_1^2 - q_2^2},$$

получим более сложную суперинтегрируемую систему со штеккелевскими интегралами

$$
\begin{aligned}
H_1 &= p_x p_y + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x^{3/2}\sqrt{y-1}} + \frac{\gamma}{x^{1/2}\sqrt{y-1}},\\
H_2 &= (xp_x - p_y - p_y y)(xp_x + p_y - p_y y) - \frac{4\alpha y}{x} - \frac{2\beta(2y-1)}{x^{1/2}\sqrt{y-1}} - \frac{2\gamma x^{1/2}}{\sqrt{y-1}}.
\end{aligned}
$$

Интеграл Эйлера при этом равен

$$
K_2 = s + c = \frac{(p_x x + p_y - p_y y)^2}{4} - \frac{\alpha(y-1)}{x} - \frac{\beta\sqrt{y-1}}{\sqrt{x}},
$$

кубический по импульсам интеграл равен

$$
\begin{aligned}
K_3 = \sqrt{S} &= -\frac{p_y(xp_x + p_y - p_y y)^2}{2} + \frac{2\alpha(y-1)p_y}{x} - \frac{\beta(p_x x - 3p_y y + 3py)}{2x^{1/2}\sqrt{y-1}}\\
&\quad -\frac{\gamma x^{1/2}(p_x x + p_y - p_y y)}{2\sqrt{y-1}},
\end{aligned}
$$

а классическая траектория движения задаётся уравнением

$$
F(x,y) = H_1 + \frac{H_2(y-2)}{6x} + \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\beta\sqrt{y-1}}{x^{3/2}} + \frac{\gamma\sqrt{y-1}}{x^{1/2}}.
$$

3.2.2. Квадратичные интегралы движения

Несложно заметить, что алгебра интегралов движения $H_{1,2}$ и K_2 — квадратичная алгебра Пуассона. Действительно,

$$
\{H_2, K_2\} = \sigma K_3 = \sigma\sqrt{S(s)}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} \sigma = 2, & V_1,\\ \sigma = -2, & V_2, V_4, V_5,\\ \sigma = 4, & V_3, \end{cases}
$$

и

$$
\{H_2\{H_2, K_2\}\} = \{H_2, \sigma\sqrt{S}\} = \frac{\sigma^2}{2} S' = \frac{\sigma^2}{2}\Big(12s^2 - g_2\Big) = \Phi(H_1, H_2, K_2),
$$

где $\Phi(H_1, H_2, K_2)$ — полином второй степени, поскольку $s = K_2 - c$, и g_2 задаётся формулой (3.9). Дополнительная информация о квадратичных алгебрах Пуассона для интегралов движения может быть найдена в работе [27].

Впервые поиском двумерных многообразий с геодезическими, обладающими двумя дополнительными квадратичными интегралами движения, занялся Дарбу [26], который нашёл пять классов таких метрик, или «естественных форм», приведённых Кёнигсом в работах [59, 63].

Такие системы обладают конформным гамильтонианом

$$H_1 = \frac{p_\xi p_\eta}{\mathrm{g}(\xi, \eta)} + V(\xi, \eta),$$

где метрика Дарбу-Кёнигса g — метрика на поверхности Лиувилля [26, 27], если

$$\mathrm{g}(\xi, \eta) = F(\xi + \eta) + G(\xi - \eta), \qquad \text{и} \qquad K_2 = {p_\xi}^2 + {p_\eta}^2 - 2p_\xi p_\eta \frac{\beta(\xi, \eta)}{\mathrm{g}(\xi, \eta)} + Q(\xi, \eta),$$

либо на поверхности Ли, если

$$\mathrm{g}(\xi, \eta) = \xi\, F(\eta) + G(\eta), \qquad \text{и} \qquad K_2 = {p_\xi}^2 - 2p_\xi p_\eta \frac{\beta(\xi, \eta)}{\mathrm{g}(\xi, \eta)} + Q(\xi, \eta).$$

Суперинтегрируемые системы, связанные с поверхностями Лиувилля, допускают разделение в двух различных ортогональных системах координат. Таким образом, две пары интегралов движения (H_1, H_2) и (H_1, K_2) принимают форму Штеккеля (3.14) после различных точечных преобразований (3.19).

Для суперинтегрируемых систем, связанных с поверхностями Ли, только одну пару интегралов (H_1, H_2) можно свести к штеккелевской форме (3.14), тогда как вторая пара интегралов (H_1, K_2) не допускает разделения в классе точечных преобразований (3.19).

Из рассмотренных выше систем две системы с потенциалами V_1 и V_2 заданы на поверхностях Ли. Остальные системы с потенциалами V_3, V_4 и V_5 заданы на поверхностях Лиувилля. Вторые переменные разделения $\widetilde{q}_{1,2}$

для интегралов движения H_1, K_2 можно вычислить, используя программное обеспечение, представленное в главе 2:

$$x=\frac{\widetilde{q}_1^2-\widetilde{q}_2^2}{4},\quad y=\frac{\widetilde{q}_1^2+\widetilde{q}_2^2}{4},\quad \text{для системы с потенциалом } V_3,$$
$$x=\widetilde{q}_2\,\widetilde{q}_1^{\,-2},\qquad y=\widetilde{q}_2\,\widetilde{q}_1^{\,2},\qquad \text{для систем с потенциалами } V_4,V_5.$$

Несложно показать, что соответствующие разделённые уравнения $\widetilde{p}_j^2=P(\widetilde{q}_j)$ задают две различные гиперэллиптические кривые и приводят к логарифмическим переменным-угол [96]. Тогда для этих трёх суперинтегрируемых систем существуют две различные теоремы сложения: теорема сложения для эллиптических функций (3.11) и теорема сложения для логарифмов $\ln\mathrm{x}+\ln\mathrm{y}=\ln\mathrm{xy}$. Таким образом, наличие разных наборов переменных разделения можно связать с выполнением нескольких различных теорем сложения для данной суперинтегрируемой системы.

Обобщением результатов Эйлера можно считать теорему Абеля. Уравнения Абеля

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{u_i(\mathrm{x}_j)\,d\mathrm{x}_j}{\sqrt{f(\mathrm{x}_j)}}=0,\qquad i=1,\ldots,p, \tag{3.25}$$

играют ключевую роль в классической механике, их применение для построения траекторий движения связывают с именами Якоби и Ришело (см. тринадцатую лекцию в книге Якоби [53]). В современной математике первый подход, или отображение Абеля-Якоби, является одной из важнейших конструкций алгебраической геометрии, связывающей алгебраическую кривую с её многообразием Якоби. Второй подход, связанный с работами Ришело, приводит к теории теорем сложения, теории модулей, криптографии и др.

В следующем разделе после краткого обзора результатов Ришело обсуждается их применение для построения дополнительных интегралов движения для уравнений Абеля и построения соответствующих N-мерных суперинтегрируемых систем классической механики. При этом рассматриваются только классические суперинтегрируемые системы, хотя соответствующие результаты можно обобщить и на квантовый случай.

3.3. Суперинтегрируемые системы типа Ришело

В этом разделе используются обозначения Ришело [82].

Пусть y — алгебраическая функция от x, заданная уравнением вида

$$\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{y}^m + f_1(\mathrm{x})\mathrm{y}^{m-1} + \cdots + f_m(\mathrm{x}) = 0, \tag{3.26}$$

где $f_1(\mathrm{x}),\ldots,f_m(\mathrm{x})$ — рациональные полиномы от x. Согласно теореме Абеля, система p дифференциальных уравнений

$$\frac{du_i}{d\mathrm{x}_1}d\mathrm{x}_1 + \cdots + \frac{du_i}{d\mathrm{x}_N}d\mathrm{x}_N = 0, \qquad i = 1,\ldots,p$$

имеет дополнительные алгебраические интегралы, если $N > p$ и если при этом функции $u_1,\ldots,u_p$ являются линейно независимыми абелевыми интегралами первого рода на алгебраической кривой (3.26). При доказательстве теоремы Абеля [15, 24, 40] используют **неявные** определения этих интегралов в виде различных детерминантов матриц ко-вычетов в точках ветвления.

Для некоторых алгебраических кривых (3.26), например гиперэллиптических кривых, существуют также **явные** формулы для интегралов, предложенные Эйлером [32], Лагранжем [69], Якоби [55], Ришело [82], Вейерштрассом [102] и другими [15, 24, 40, 67].

3.3.1. Интегралы Ришело

Следуя обозначениям Ришело [82], рассмотрим гиперэллиптическую кривую

$$\mathrm{y}^2 = f(\mathrm{x}) \equiv A_{2n}\mathrm{x}^{2n} + A_{2n-1}\mathrm{x}^{2n-1} + \cdots + A_1\mathrm{x} + A_0 \tag{3.27}$$

и систему $n-1$ дифференциального уравнения Абеля

$$\begin{array}{l}
\dfrac{d\mathrm{x}_1}{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}+\dfrac{d\mathrm{x}_2}{\sqrt{f(\mathrm{x}_2)}}+\cdots+\dfrac{d\mathrm{x}_n}{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}=0,\\
\dfrac{\mathrm{x}_1 d\mathrm{x}_1}{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}+\dfrac{\mathrm{x}_2 d\mathrm{x}_2}{\sqrt{f(\mathrm{x}_2)}}+\cdots+\dfrac{\mathrm{x}_n d\mathrm{x}_n}{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\dfrac{\mathrm{x}_1^{n-2} d\mathrm{x}_1}{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}+\dfrac{\mathrm{x}_2^{n-2} d\mathrm{x}_2}{\sqrt{f(\mathrm{x}_2)}}+\cdots+\dfrac{\mathrm{x}_n^{n-2} d\mathrm{x}_n}{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}=0\,.
\end{array} \tag{3.28}$$

Пусть a_k — значения x в точках ветвления кривой (3.27) и $F(\mathrm{x})=(\mathrm{x}-\mathrm{x}_1)(\mathrm{x}-\mathrm{x}_2)\cdots(\mathrm{x}-\mathrm{x}_n)$, тогда в общем случае дополнительные интегралы уравнений Абеля (3.28) имеют вид

$$C_k=\frac{\left[\dfrac{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}{F'(\mathrm{x}_1)}\cdot\dfrac{1}{a_k-\mathrm{x}_1}+\cdots+\dfrac{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}{F'(\mathrm{x}_n)}\cdot\dfrac{1}{a_k-\mathrm{x}_n}\right]^2}{\left[\dfrac{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}{F'(\mathrm{x}_1)}+\cdots+\dfrac{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}{F'(\mathrm{x}_n)}\right]^2-A_{2n}}\,F(a_k). \tag{3.29}$$

Если $A_{2n}=0$, то дополнительные интегралы уравнений (3.28) равны

$$C_k=\left[\frac{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}{F'(\mathrm{x}_1)}\cdot\frac{1}{a_k-\mathrm{x}_1}+\cdots+\frac{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}{F'(\mathrm{x}_n)}\cdot\frac{1}{a_k-\mathrm{x}_n}\right]^2\sqrt{F(a_k)}\,. \tag{3.30}$$

Подчеркнем, что эти интегралы определены **неявно** (абстрактно), так как построить **явно** корни a_k полинома степени $2n$ при $n>1$ не представляется возможным. Заметим, однако, что в множестве интегралов C_k всего $n-1$ функционально независимый интеграл и, естественно, функции от этих интегралов также являются интегралами движения.

Используя специально выбранные функции интегралов C_k, можно избежать необходимости вычислять значения a_k от x в точках ветвления [55, 82, 102]. Например, Ришело в своей работе нашёл два **явных** алгебраических интеграла

$$K_1=\left[\frac{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}{F'(\mathrm{x}_1)}+\dots+\frac{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}{F'(\mathrm{x}_n)}\right]^2-A_{2n-1}(\mathrm{x}_1+\dots+\mathrm{x}_n)-A_{2n}(\mathrm{x}_1+\dots+\mathrm{x}_n)^2 \tag{3.31}$$

и

$$\begin{aligned} K_2 &= \left[\frac{\sqrt{f(\mathrm{x}_1)}}{\mathrm{x}_1^2F'(\mathrm{x}_1)}+\dots+\frac{\sqrt{f(\mathrm{x}_n)}}{\mathrm{x}_n^2F'(\mathrm{x}_n)}\right]^2\mathrm{x}_1^2\mathrm{x}_2^2\cdots\mathrm{x}_n^2 \\ &- A_1\left(\frac{1}{\mathrm{x}_1}+\dots+\frac{1}{\mathrm{x}_n}\right)-A_0\left(\frac{1}{\mathrm{x}_1}+\dots+\frac{1}{\mathrm{x}_n}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.32}$$

В общем случае производящая функция таких **явных** интегралов построена Вейерштрассом в работе [102], см. также детальное обсуждение этой проблемы в книге [15].

3.3.2. Построение суперинтегрируемых систем типа Ришело

Применим метод Ришело для классификации суперинтегрируемых систем классической механики.

Определение 1. *Интегрируемая система с N степенями свободы является суперинтегрируемой системой типа Ришело, если $n-1$, $1<n\le N$, уравнение движения являются уравнениями Абеля-Ришело (3.28).*

Такие суперинтегрируемые системы типа Ришело достаточно просто построить в рамках метода разделения переменных Якоби [41, 96, 97].

Рассмотрим сначала максимально суперинтегрируемые системы Ришело, для которых $N=n$, т. е. для которых число степеней свободы на единицу больше рода соответствующей гиперэллиптической кривой. В этом случае выбирается одна гиперэллиптическая кривая (3.27)

$$\mu^2=f(\lambda),\qquad \text{где}\qquad f(\lambda)=A_{2n}\lambda^{2n}+A_{2n-1}\lambda_i^{2n-1}+\dots+A_1\lambda+A_0, \tag{3.33}$$

и вводится n произвольных подстановок

$$\lambda_j = v_j(q_j) \qquad \mu_j = u_j(q_j)p_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3.34}$$

где p и q — канонические переменные $\{p_j, q_i\} = \delta_{ij}$.

Используя n экземпляров этой гиперэллиптической кривой и n-подстановок, получим n разделённых уравнений

$$p_j^2\, u_j^2(q_j) = A_{2n} v_j(q_j)^{2n} + A_{2n-1} v_j(q_j)_i^{2n-1} + \cdots + A_1 v_j(q_j) + A_0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3.35}$$

где $2n+1$ коэффициент $A_{2n}, \ldots, A_0$ — линейные функции от n интегралов движения $H_1, \ldots, H_n$ и $2n+1$ произвольного параметра $\alpha_0, \ldots, \alpha_{2n+1}$.

Разрешая эти разделённые уравнения относительно H_k, получим функционально независимые интегралы движения типа Штеккеля

$$H_k = \sum_{j=1}^{n} (S^{-1})_{jk} \Big(p_j^2 + U_j(q_j) \Big), \qquad k = 1, \ldots, n = N, \tag{3.36}$$

где $U_j(q_j)$ — так называемые штеккелевские потенциалы и S — матрица Штеккеля [89].

Если H_1 — функция Гамильтона, то можно найти решения уравнений движения $q_j(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из уравнений Якоби

$$\sum_{j=1}^{n} \int \frac{S_{1j}(q_j) dq_j}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_{1j}(q_j) - U_j(q_j)}} = \beta_1 - t \tag{3.37}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \int \frac{S_{ij}(q_j) dq_j}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_{kj}(q_j) - U_j(q_j)}} = \beta_i\,, \qquad i = 2, \ldots, n\,, \tag{3.38}$$

где t — переменная времени, соответствующая функции Гамильтона H_1. Согласно Якоби [53], в дифференциальной форме уравнения (3.37,3.38) являются уравнениями Абеля (3.25), и нахождение решений уравнений движения сводится к обращению Якоби отображения Абеля.

Для того, чтобы использовать рассмотренные выше результаты Ришело для уравнений Абеля, необходимо наложить ограничения на элементы матрицы Штеккеля $S_{kj}(q_j)$, что приведёт к условиям на коэффициенты A_k [41, 96].

В частности, если сравнить $n-1$ уравнение (3.28) и уравнения (3.38) при $\lambda = \mathrm{x}$, окажется, что матрица Штеккеля в переменных λ должна иметь одну из следующих форм, отличающихся друг от друга только первой строкой:

$$S^{(k)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \lambda_2^k & \cdots & \lambda_n^k \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad k = n, n+1, \ldots, 2n, \tag{3.39}$$

так что

$$\mu^2 = f(\lambda) = \lambda^k H_1 + \lambda^{n-1} H_{n-1} \cdots + H_{n-1}\lambda + H_n + \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j \lambda^j\,. \tag{3.40}$$

Поскольку k — произвольное число от n до $2n$, в результате получается семейство двойственных систем Штеккеля, связанных с одной гиперэллиптической кривой (3.33) и различными блоками соответствующей матрицы Бриль-Нётер [92, 94].

Примечание 1. Для любых двух двойственных систем с функциями Гамильтона H_1 и $\widetilde{H}_1$ соответствующие матрицы Штеккеля $S^{(k)}$ и $S^{(\widetilde{k})}$ отличаются только первой строкой. Эти системы Штеккеля связаны каноническим преобразованием времени $t \to \widetilde{t}$:

$$\widetilde{H}_1 = \mathrm{v}(q)\, H_1, \quad d\widetilde{t} = \mathrm{v}(q)\, dt, \qquad \text{где} \qquad \mathrm{v}(q) = \frac{\det S^{(k)}}{\det S^{(\widetilde{k})}}. \tag{3.41}$$

У таких дуальных систем общие траектории с разной параметризацией по времени [58, 92]. Существование таких систем связано с тем фактом, что отображение Абеля является сюръективным и, в общем случае, инъективным.

Примечание 2. Если рассмотреть дуальные системы, то окажется, что для них соответствующие гиперэллиптические кривые (3.40) связаны перестановкой одного из параметров α и функции Гамильтона H_1 и, следовательно, такие преобразования называются „coupling constant metamorphoses“ [23, 48, 92]. Такие преобразования также тесно связаны с взаимнообратными или реверсивными преобразованиями [12].

Сейчас кратко рассмотрим построение суперинтегрируемых систем типа Ришело, для которых только $n-1$ уравнение движения из N являются уравнениями Абеля-Ришело. В этом случае к n уравнениям (3.35) необходимо добавить $N-n$ произвольных разделённых уравнений

$$\Phi_m(p_m, q_m, H_1, \ldots, H_N) = 0, \qquad n < m \leq N.$$

Решая этот полный набор разделённых уравнений относительно интегралов движения H_k, получим N функционально независимых интегралов движения (3.36). Как и прежде, уравнения Абеля должны совпасть с уравнениями Ришело (3.28) и, следовательно, блок размера $n \times n$ матрицы Штеккеля размера $N \times N$ должен иметь вид (3.39). Приняв во внимание все эти условия, можно получить полную классификацию суперинтегрируемых систем типа Ришело.

Сложность в практическом применении этого метода заключается в том, что в классической механике обычно требуется получить функцию Гамильтона H_j, выраженную в физических переменных x натурального вида (или какого-то другого специального вида), а не построенные таким образом функции Гамильтона (3.36), зависящие от абстрактных переменных разделения q. Согласно [41, 96, 97], условие соответствия функции Гамильтона в физических переменных натуральному виду накладывает дополнительные ограничения на коэффициенты A_j в (3.33) и на подстановки (3.34).

Легко заметить, что интегралы движения H_k (3.36) и дополнительные интегралы движения Ришело являются полиномами второй степени по импульсам

$$K_1 = \left[\frac{u_1 p_1}{F'(v_1)} + \cdots + \frac{u_n p_n}{F'(v_n)}\right]^2 - A_{2n-1}(v_1 + \cdots + v_n) - A_{2n}(v_1 + \cdots + v_n)^2 \quad (3.42)$$

и

$$\begin{aligned} K_2 \;&=\; \left[\frac{u_1 p_1}{v_1^2 F'(v_1)} + \cdots + \frac{u_n p_n}{v_n^2 F'(v_n)}\right]^2 v_1^2 v_2^2 \cdots v_n^2 \\ &-\; A_1 \left(\frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right) - A_0 \left(\frac{1}{v_1} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right)^2 . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Здесь функции u_j и v_j зависят только от координат.

Таким образом, в случае Ришело все интегралы движения являются полиномами второй степени по импульсам, что позволяет найти суперинтегрируемые системы с гамильтонианом натурального вида на римановых многообразиях постоянной кривизны, используя хорошо изученную теорию ортогональных систем координат и соответствующих тензоров Киллинга [18, 30, 61, 79] на этих многообразиях.

3.4. Системы Ришело, интегрируемые в одной из ортогональных систем координат

Произвольную ортогональную систему координат можно представить в виде прямой суммы некоторых основных систем координат [18, 30, 61, 79]. В данном разделе будут рассмотрены некоторые из таких базовых систем координат в n-мерном евклидовом пространстве и на сфере.

3.4.1. Базовые ортогональные системы координат

Определение 2. *Эллиптическая система координат $\{q_i\}$ в N-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}_N$ с параметрами $e_1 < e_2 < \cdots < e_N$ определяется уравнением*

$$e(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k^2}{\lambda - e_k} = \frac{\prod_{j=1}^{N}(\lambda - q_j)}{\prod_{i=1}^{N}(\lambda - e_i)}\,. \tag{3.44}$$

Здесь уравнение (3.44) следует рассматривать как тождество по отношению к произвольному λ.

Положив два или более параметра e_i равными друг другу, получим вырожденную эллиптическую систему координат. При этом эллипсоид станет сфероидом или даже сферой, если все параметры будут равны. Таким образом, у системы появляется вращательная симметрия порядка m, если $m+1$ параметр совпадает.

Пример 1. Положив для примера $e_1 = e_2$, получим

$$e(\lambda) = 1 + \frac{r^2}{\lambda - e_1} + \sum_{i=3}^{N} \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = \frac{\prod_{i=1}^{N-1}(\lambda - q_i)}{\prod_{j=1}^{N-1}(\lambda - e_j)}, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2\,. \tag{3.45}$$

Этим уравнением определяется эллиптическая система координат в пространстве $\mathbb{E}_{N-1} = \{r, x_3, \cdots, x_N\}$. Для построения ортогональной системы координат $\{q_1, \cdots, q_N\}$ в $\mathbb{E}_N$ можно дополнить радиус r некоторой угловой координатой q_N в плоскости $\{x_1, x_2\}$, например, таким образом:

$$x_1 = r\cos q_N, \qquad x_2 = r\sin q_N\,, \qquad \text{где} \quad r = \sqrt{\operatorname{res}|_{\lambda=e_1} e(\lambda)}\,. \tag{3.46}$$

При $N = 3$ эти уравнения задают вытянутую сфероидальную систему координат.

При $e_1 = e_2 = \cdots = e_n$ остаётся одна координата $r = \sqrt{\sum x_i^2}$, и $N-1$ угловых ортогональных координат вводятся на единичной сфере $\mathbb{S}_{N-1}$ произвольным образом — это могут быть углы Эйлера или какие-либо другие координаты, отличающиеся от них, например, отражением осей или поворотом.

Таким образом, при вырождении часть координат определена явно, а часть координат (угловые координаты) определяется достаточно произвольным образом — в книге [61] такие угловые координаты называются **скрытыми** координатами.

Определение 3. *Параболическая система координат* $\{q_i\}$ *в* $\mathbb{E}_N$ *с параметрами* $e_1 < e_2 < \cdots < e_{N-1}$ *определяется уравнением*

$$e(\lambda) = \lambda - 2x_N - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{x_k^2}{\lambda - e_k} = \frac{\prod_{j=1}^{N}(\lambda - q_j)}{\prod_{i=1}^{N-1}(\lambda - e_i)}. \tag{3.47}$$

Эти ортогональные системы координат можно также вывести из эллиптической системы координат. Действительно, подставляя

$$x_i = \frac{x_i'}{\sqrt{e_i}}, \qquad i = 1, \ldots, N-1, \qquad x_N = \frac{x_N' - e_N}{\sqrt{e_N}}$$

в уравнение (3.44) и устремляя e_N к бесконечности, после сокращения подобных членов получим параболическую систему координат.

В параболической системе координат вырождения рассматриваются аналогично вырождениям в эллиптической системе координат.

Пример 2. При $e_1 = e_2$ получаем

$$e(\lambda) = \lambda - 2x_N - \frac{r^2}{\lambda - e_1} - \sum_{k=3}^{N-1} \frac{x_k^2}{\lambda - e_k} = \frac{\prod_{j=1}^{N-1}(\lambda - q_j)}{\prod_{i=1}^{N-2}(\lambda - e_i)}, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2. \tag{3.48}$$

Как и ранее, для построения ортогональной системы координат $\{q_1, \cdots, q_n\}$ в $\mathbb{E}_N$ необходимо к радиусу r добавить скрытую переменную, например угловую координату q_N в плоскости $\{x_1, x_2\}$, заданную уравнением (3.46). При $N = 3$ таким образом получаются так называемые параболоидальные координаты.

Определение 4. *Эллиптическая система координат* $\{q_i\}$ *на сфере* $\mathbb{S}_N$ *с параметрами* $e_1 < e_2 < \cdots < e_{N+1}$ *определяется уравнением*

$$e(\lambda) = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{x_k^2}{\lambda - e_k} = \frac{\prod_{j=1}^{N}(\lambda - q_j)}{\prod_{i=1}^{N+1}(\lambda - e_i)}\,. \tag{3.49}$$

Необходимо отметить, что уравнение (3.49) предполагает выполнение дополнительного условия $\sum_{i=1}^{N+1} x_i^2 = 1$. Подобным образом можно определить эллиптическую систему координат $\{q_i\}$ и на гиперболоиде $\mathbb{H}_N$, который задаётся уравнением $x_0^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 1$ [61]. Как и в предыдущих примерах, эти координаты можно сделать вырожденными, положив некоторые из параметров e_i равными друг другу.

Примечание 3. Алгоритмы [18, 79] и программное обеспечение, описанные в главе 2, позволяют для заданной функции Гамильтона натурального вида $H = T + V$ на римановом многообразии постоянной кривизны определить существование переменных разделения для уравнения Гамильтона-Якоби, совпадающих с одной из ортогональных систем координат, и в случае их существования предъявить способ их построения, то есть получения производящей функции $e(\lambda)$.

3.4.2. Максимально суперинтегрируемые системы типа Ришело

Основные ортогональные системы координат определяются функцией

$$e(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{N}(\lambda - q_j)}{\prod_{j=1}^{M}(\lambda - e_j)} = \frac{\phi(\lambda)}{u(\lambda)}\,, \qquad M = N, N \pm 1, \tag{3.50}$$

являющейся отношением полиномов

$$\phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{N}(\lambda - q_j) \qquad \text{и} \qquad u(\lambda) = \prod_{j=1}^{M}(\lambda - e_j)\,. \tag{3.51}$$

Максимально суперинтегрируемые системы типа Ришело, допускающие разделение переменных в таких системах координат, можно описать, воспользовавшись следующим утверждением.

Теорема 8. *Если $n = N$ разделённых уравнений имеют вид*

$$
\begin{aligned}
p_i^2\, u(q_i)^2 \;&=\; \frac{1}{2}\left[u(\lambda)\cdot\left(H_1\,\lambda^k + \sum_{i=2}^{N} H_i\,\lambda^{n-i}\right) - \alpha(\lambda)\right]_{\lambda=q_i}, \\
\alpha(\lambda) \;&=\; \sum_{j=0}^{2N} \alpha_j\,\lambda^j,
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

где $\alpha(\lambda)$ — произвольный полином, то уравнения движения (3.38) являются уравнениями Абеля–Ришело (3.28).

Если $k = n$, то соответствующий максимально суперинтегрируемый гамильтониан

$$
H_1 = T + V = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{res}\Big|_{\lambda=q_i} \frac{1}{e(\lambda)}\cdot p_i^2 - \sum_{i=1}^{N} \mathrm{res}\Big|_{\lambda=q_i} \frac{\alpha(\lambda)}{u^2(\lambda)e(\lambda)}
$$

представляется в натуральном виде в физических декартовых координатах на пространстве $\mathbb{E}_n$

$$
H_1 = T + V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_{x_i}^2 + \sum_{i=0}^{M} \mathrm{res}\Big|_{\lambda=e_i} \frac{\alpha(\lambda)}{u^2(\lambda)\,e(\lambda)}. \tag{3.53}
$$

В последнем выражении для краткости введён дополнительный параметр $e_0 = \infty$.

Если $k > n$, то $H_1^{(k>n)} = \mathrm{v}(x)\,H_1$, где функция $\mathrm{v}(x)$ даётся уравнением (3.41).

Легко показать, что эти максимально суперинтегрируемые системы типа Ришело совпадают с полученными другими методами суперинтегрируемыми системами [16, 27, 33, 36, 58, 83]. Так, для эллиптической системы координат в $\mathbb{E}_N$ уравнение (3.53) приводит к потенциалу

$$
V = \alpha_{2N}(x_1^2 + \cdots x_n^2) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\gamma_i}{x_i^2}, \qquad \gamma_i = \frac{\alpha(e_i)}{\prod_{j\neq i}(e_i - e_j)^2}\,.
$$

Для параболической системы координат в $\mathbb{E}_N$ получается

$$V = \alpha_{2N}(x_1^2 + \cdots 4x_N^2) + \gamma_N x_N + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\gamma_i}{x_i^2}, \qquad \gamma_N = 4\alpha_{2N} \sum e_i + 2\alpha_{2N-1}\,.$$

Для эллиптической системы координат на сфере $\mathbb{S}_N$ или на гиперболоиде $\mathbb{H}_N$ получаем

$$V = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\gamma_i}{x_i^2}, \qquad \gamma_i = \frac{\alpha(e_i)}{\prod_{j\neq i}(e_i - e_j)^2}\,.$$

Для того, чтобы сравнить трудоемкость вычислений в различных методах, приведем несколько примеров:

Пример 3. Рассмотрим параболическую систему с координатами (q_1, q_2, q_3), заданными уравнением

$$e(\lambda) = \lambda - 2x_3 - \frac{x_1^2}{\lambda - e_1} - \frac{x_2^2}{\lambda - e_2} = \frac{(\lambda - q_1)(\lambda - q_2)(\lambda - q_3)}{(\lambda - e_1)(\lambda - e_2)}\,,$$

соответствующие импульсы равны

$$p_i = \frac{x_1 p_{x_1}}{2(q_i - e_1)} + \frac{x_2 p_{x_2}}{2(q_i - e_2)} + \frac{p_{x_3}}{2}, \qquad i = 1, \ldots, 3.$$

В этом случае разделённые уравнения (3.52) имеют вид

$$p_i^2(q_i - e_1)^2(q_i - e_2)^2 = \frac{1}{2}\Big[(H_1\lambda^2 + H_2\lambda + H_3)(\lambda - e_1)(\lambda - e_2) - \alpha(\lambda)\Big]_{\lambda = q_i}, i = 1, \ldots, 3. \tag{3.54}$$

Решая эти уравнения относительно H_k, получим интегралы движения и функцию Гамильтона

$$H_1 = \frac{p_{x_1} + p_{x_2} + p_{x_3}}{2} + \alpha_6(x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2) + \gamma_3 x_3 + \frac{\gamma_1}{x_1^2} + \frac{\gamma_2}{x_2^2} + const\,. \tag{3.55}$$

Это максимально суперинтегрируемый гамильтониан со штеккелевскими интегралами движения H_2, H_3 и двумя дополнительными интегралами движения

Ришело $K_{1,2}$ (3.42-3.43):

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \left(\frac{(q_1-e_1)(q_1-e_2)p_1}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)}+\frac{(q_2-e_1)(q_2-e_2)p_2}{(q_2-q_1)(q_2-q_3)}+\frac{(q_3-e_1)(q_3-e_2)p_3}{(q_3-q_1)(q_3-q_2)}\right)^2\\
&+ \frac{\alpha_5}{2}(q_1+q_2+q_3)+\frac{\alpha_6}{2}(q_1+q_2+q_3)^2\,,
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

$$
\begin{aligned}
K_2 &= \left(\frac{(q_1-e_1)(q_1-e_2)p_1}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)q_1^2}+\frac{(q_2-e_1)(q_2-e_2)p_2}{(q_2-q_1)(q_2-q_3)q_2^2}+\frac{(q_3-e_1)(q_3-e_2)p_3}{(q_3-q_1)(q_3-q_2)q_3^2}\right)^2\\
&\cdot\ q_1^2q_2^2q_3^2+\frac{H_3e_1+(H_3-H_2e_1)e_2}{2}\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}\right)\\
&- \frac{e_1e_2H_3}{2}\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}\right)^2.
\end{aligned}
$$

В физических переменных (x,p_x) эти интегралы имеют достаточно сложный вид, и их построение другими методами занимает достаточно много времени.

Несложно показать, что интегралы H_1,H_2,H_3 и K_1,K_2 функционально независимы. Конечно, все эти интегралы движения могут быть также получены и в рамках теории Вейерштрасса [102].

Пример 4. Рассмотрим двойственную систему Штеккеля и положим $k=n+1$ в матрице Штеккеля (3.39) из предыдущего примера. Это будет означать перестановку одного из коэффициентов и гамильтониана в разделённых уравнениях (3.54)

$$
p_i^2(q_i-e_1)^2(q_i-e_2)^2=\frac{1}{2}\Big[(\widetilde{H}_1\lambda^3+\widetilde{H}_2\lambda+\widetilde{H}_3)(\lambda-e_1)(\lambda-e_2)-\alpha(\lambda)\Big]_{\lambda=q_i},\, i=1,\ldots,3.
$$

Решая эти уравнения, получим суперинтегрируемую систему с гамильтонианом

$$
\widetilde{H}_1=\mathrm{v}(q)\,H_1=\frac{1}{2x_3+e_1+e_2}\,H_1,
$$

где H_1 задан формулой (3.55). Заметим, что такое каноническое преобразование времени существенно меняет вид дополнительных интегралов движения $K_{1,2}$ (3.55).

3.4.3. Суперинтегрируемые системы типа Ришело

Теперь рассмотрим вырожденные системы координат, для которых два или более параметров e_j совпадают друг с другом.

В терминах переменных разделения производящая функция $e(\lambda)$ остаётся мероморфной функцией с n простыми корнями и $m = n, n \pm 1$ простыми полюсами. Так как для построения систем Ришело используется система уравнений Абеля–Ришело, то это приводит к ограничению на число корней $1 < n < N$ функции $e(\lambda)$.

В этом случае для построения суперинтегрируемых систем Ришело с $n-1$ дополнительным интегралом движения необходимо рассмотреть n разделённых уравнений (3.52)

$$p_i^2\, u(q_i)^2 = \frac{1}{2}\left[u(\lambda)\cdot\left(H_1\,\lambda^k + \sum_{i=2}^{n} H_i\,\lambda^{n-i}\right) - \alpha(\lambda) + \frac{1}{2}\sum_{j=n+1}^{N}\frac{u(\lambda)}{\mathrm{g}_j(\lambda)}H_j\right]_{\lambda=q_i}, \tag{3.57}$$

и $N-n$ разделённых уравнений для скрытых или угловых координат

$$p_j^2 = 2\Big(U_j(q_j) - H_j\Big), \qquad j = n+1,\dots,N. \tag{3.58}$$

Здесь полиномы $\mathrm{g}_j(\lambda)$ зависят от степени вырождения и определения скрытых координат, см. [18, 61], тогда как $U_j(q_j)$ — произвольные функции этих скрытых (угловых) координат q_j.

Решая эти уравнения относительно интегралов движения H_j, получим функцию Гамильтона в том же виде (3.53); отличие будет лишь в том, что на этот раз коэффициенты полинома $\alpha(\lambda)$ будут зависеть от скрытых координат.

Теорема 9. *В вырожденных эллиптических и параболических координатах суперинтегрируемые потенциалы типа Ришело имеют вид (3.53)*

$$V = \sum_{i=0}^{m} \mathrm{res}\Big|_{\lambda=e_i} \frac{\alpha(\lambda) - U_i}{u^2(\lambda)\,e(\lambda)}, \qquad e_0 = \infty, \tag{3.59}$$

где $U_i = 0$ для простых корней e_i исходной функции $(\lambda - e_1)\cdots(\lambda - e_M)$ (3.51) после вырождения $e_k = e_j$. Для вырожденных корней $e_k = e_j$ потенциал U_i является произвольной функцией от соответствующих скрытых координат.

Таким образом можно классифицировать все суперинтегрируемые системы Ришело, используя известную классификацию ортогональных систем координат [16, 27, 33, 36, 41, 58, 83]. Иными словами, можно взять любую из ортогональных систем координат на римановом многообразии постоянной кривизны, например из книги Калнинса [61], и построить соответствующий суперинтегрируемый потенциал Ришело по формуле (3.59).

Пример 5. Возьмём для примера вытянутую сфероидальную систему координат (q_1, q_2, q_3), заданную уравнением

$$e(\lambda) = 1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{\lambda - e_1} + \frac{x_3^2}{\lambda - e_3} = \frac{(\lambda - q_1)(\lambda - q_2)}{(\lambda - e_1)(\lambda - e_3)}, \qquad q_3 = \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

Соответствующие импульсы имеют вид

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{x_1 p_{x_1} + x_2 p_{x_2}}{2(q_1 - e_1)} + \frac{x_3 p_{x_3}}{2(q_1 - e_3)}, \\ p_2 &= \frac{x_1 p_{x_1} + x_2 p_{x_2}}{2(q_2 - e_1)} + \frac{x_3 p_{x_3}}{2(q_2 - e_3)}, \\ p_3 &= x_2 p_{x_1} - x_1 p_{x_2}. \end{aligned}$$

В этом случае $\mathrm{g}(\lambda) = (e_3 - e_1)^{-1}(\lambda - e_1)$ и разделённые уравнения (3.57) принимают форму

$$\begin{aligned} p_i^2 (q_i - e_1)^2 (q_i - e_3)^2 &= \frac{1}{2}\Big[(H_1\lambda + H_2)(\lambda - e_1)(\lambda - e_2) \\ &\qquad -\alpha(\lambda) + \frac{(\lambda - e_3)(e_3 - e_1)H_3}{2}\Big]_{\lambda = q_i}, \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$p_3 = 2\Big(U(q_3) - H_3\Big),$$

где $\alpha(\lambda)=\alpha_4\lambda^4+\alpha_3\lambda^3+\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0$ — произвольный полином четвертого порядка.

Решая эти уравнения относительно H_k, получим интегралы движения и функцию Гамильтона

$$H_1=\frac{p_{x_1}+p_{x_2}+p_{x_3}}{2}+\alpha_4(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\frac{\gamma_1-U\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}{x_1^2+x_2^2}+\frac{\gamma_3}{x_3^2}-2\alpha_4(e_3+e_1)-\alpha_3\,,$$

где

$$\gamma_{1,3}=\frac{\alpha(e_{1,3})}{(e_1-e_3)^2}\,.$$

Это суперинтегрируемый гамильтониан с интегралами движения Штеккеля H_2,H_3 и дополнительным интегралом движения Ришело K_1 (3.42), имеющим вид

$$\begin{aligned}K_1 &= \left(\frac{(q_1-e_1)(q_1-e_3)p_1}{q_1-q_2}+\frac{(q_2-e_1)(q_2-e_3)p_2}{q_2-q_1}\right)^2\\ &\quad-\frac{(H_1-\alpha_3)(q_1+q_2)}{2}+\frac{\alpha_4(q_1+q_2)^2}{2}\,.\end{aligned}$$

В физических переменных (x,p_x) этот интеграл движения равен

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{(x_1p_{x_1}+x_2p_{x_2}+x_3p_{x_3})^2}{4}\\ &\quad+\frac{e_1+e_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2}{2}\Big(\alpha_4(e_1+e_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2)+\alpha_3-H_1\Big)\,.\end{aligned}$$

Второй интеграл Ришело K_2 (3.43) имеет вид

$$\begin{aligned}K_2 &= \left(\frac{(q_1-e_1)(q_1-e_3)p_1}{(q_1-q_2)q_1^2}+\frac{(q_2-e_1)(q_2-e_3)p_2}{(q_2-q_1)q_2^2}\right)^2 q_1^2q_2^2\\ &\quad-A_1\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)-A_0\left(\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\right)\,,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{2}\left(e_1e_3H_1-(e_1+e_3)H_2+(e_1-e_3)H_3-\alpha_1\right),\\ A_0 &= \frac{1}{2}\left(e_1e_3H_2-e_3(e_1-e_3)H_3-\alpha_0\right)\,.\end{aligned}$$

Легко проверить, что при подстановке $H_1, \ldots, H_3$ в K_2 получается $K_1 = K_2$, поскольку в этом случае есть только одно уравнение Абеля–Ришело, так как $n-1=1$, и один функционально независимый дополнительный интеграл движения. Это означает, что гамильтониан H_1 в $\mathbb{E}_3$ не будет максимально суперинтегрируемым и траектории движения будут просто ограниченными, а не замкнутыми [9].

Пример 6. Рассмотрим параболоидальные координаты (q_1, q_2, q_3), заданные уравнением

$$e(\lambda) = \lambda - 2x_3 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{\lambda - e_1} = \frac{(\lambda - q_1)(\lambda - q_2)}{\lambda - e_1}, \qquad q_3 = \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right),$$

при этом соответствующие импульсы имеют вид

$$p_1 = \frac{x_1 p_{x_1} + x_2 p_{x_2}}{2(q_1 - e_1)} + \frac{p_{x_3}}{2}, \qquad p_2 = \frac{x_1 p_{x_1} + x_2 p_{x_2}}{2(q_2 - e_1)} + \frac{p_{x_3}}{2}, \qquad p_3 = x_2 p_{x_1} - x_1 p_{x_2}.$$

В этом случае $\mathrm{g}(\lambda) = (\lambda - e_1)$ и разделённые уравнения (3.57-3.58) равны

$$p_{1,2}^2 (q_{1,2} - e_1)^2 = \frac{1}{2}\left[(H_1\lambda + H_2)(\lambda - e_1) - \alpha(\lambda) + \frac{H_3}{2}\right]_{\lambda = q_{1,2}},$$

$$p_3^2 = 2(U(q_3) - H_3),$$

где $\alpha(\lambda) = \alpha_4\lambda^4 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$. Решая эти уравнения относительно H_k, получим интегралы движения и функцию Гамильтона

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{p_{x_1} + p_{x_2} + p_{x_3}}{2} + \alpha_4(x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2) + 2(2\alpha_4 e_1 + \alpha_3)x_3 \\ &+ \frac{\alpha(e_1) - U\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}{x_1^2 + x_2^2} - 3\alpha_4 e_1^2 - 2\alpha_3 e_1 - \alpha_2 . \end{aligned}$$

Это суперинтегрируемый гамильтониан со штеккелевскими интегралами движения H_2, H_3 и дополнительным интегралом движения Ришело K_1 (3.42), имеющим вид

$$\begin{aligned} K_1 &= \left(\frac{(q_1-e_1)p_1}{q_1-q_2}+\frac{(q_2-e_1)p_2}{q_2-q_1}\right)^2+\frac{\alpha_3}{2}(q_1+q_2)+\frac{\alpha_4}{2}(q_1+q_2)^2 \\ &= \frac{p_{x_3}^2}{4}+2\alpha_4x_3^2+(2\alpha_4e_1+\alpha_3)x_3+\frac{e_1(\alpha_4e_1+\alpha_3)}{2}\,. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Как и в предыдущем примере, здесь $K_1 = K_2$ (3.42-3.43).

Пример 7. Рассмотрим вырожденную эллиптическую систему координат на сфере $\mathbb{S}_3$ в $\mathbb{E}_4$, так что координаты (q_1, q_2, q_3) заданы уравнением

$$e(\lambda)=\frac{x_1^2+x_2^2}{\lambda-e_1}+\frac{x_3^2}{\lambda-e_3}+\frac{x_4^2}{\lambda-e_4}=\frac{(\lambda-q_1)(\lambda-q_2)}{(\lambda-e_1)(\lambda-e_3)(\lambda-e_4)}\,,\ q_3=\arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right).$$

Это означает, что радиус сферы равен $R=\sum_{i=1}^4 x_i^2=1$.

В этом случае $\mathrm{g}(\lambda)=(e_3-e_1)^{-1}(e_1-e_4)^{-1}(\lambda-e_1)$ и пара разделённых уравнений равна

$$\begin{aligned} p_i^2(q_i-e_1)^2(q_i-e_3)^2(q_i-e_4)^2 \;&=\; \frac{1}{2}\Big[(H_1\lambda+H_2)(\lambda-e_1)(\lambda-e_3)(\lambda-e_4) \\ &\quad -\alpha(\lambda)\;+\;(e_3-e_1)(e_1-e_4)(\lambda-e_3)(\lambda-e_4)H_3\Big]_{\lambda=q_{1,2}}\,, \end{aligned} \tag{3.62}$$

где $\alpha(\lambda)$ — полином четвёртой степени с произвольными коэффициентами, а третье разделённое уравнение для скрытой переменной имеет вид

$$p_3^2=2(U(q_3)-H_3)\,.$$

Решая разделённые уравнения относительно H_k, получим интегралы движения и функцию Гамильтона

$$H_1=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^4 x_i^2\cdot\sum_{i=1}^4 p_i^2-\left(\sum_{i=1}^4 x_ip_i\right)^2\right)+\frac{\gamma_1+U\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{x_1^2+x_2^2}+\frac{\gamma_3}{x_3^3}+\frac{\gamma_4}{x_4^2}-\frac{\alpha_4}{R}\,,$$

где

$$\gamma_i=\frac{\alpha(e_i)}{\prod_{j\neq i}(e_i-e_j)^2}\,.$$

Это суперинтегрируемая функция Гамильтона, и дополнительный интеграл Ришело имеет вид

$$\begin{aligned}K_1 &= \left(\frac{(q_1-e_1)(q_1-e_3)(q_1-e_4)p_1}{q_1-q_2}+\frac{(q_2-e_1)(q_2-e_3)(q_2-e_4)p_2}{q_2-q_1}\right)^2\\&+\frac{(e_1+e_3+e_4)H_1+\alpha_3-H_2}{2}\Big(q_1+q_2\Big)+\frac{\alpha_4-H_1}{2}\Big(q_1+q_2\Big)^2.\end{aligned} \quad (3.63)$$

При этом $n=2$ и, следовательно, $K_1=K_2$ (3.42-3.43).

В этом случае преобразование времени (3.41) при $k=n+1$ приводит к следующему преобразованию пары разделённых уравнений (3.57,3.62):

$$p_i^2\,u(q_i)^2=\frac{1}{2}\left[u(\lambda)\cdot\big(H_1\,\lambda^2+H_2\big)-\alpha(\lambda)+\frac{1}{2}\frac{u(\lambda)}{\mathrm{g}_3(\lambda)}H_3\right]_{\lambda=q_i}=\frac{H_1}{2}\,\lambda^5+\ldots\Big|_{\lambda=q_i}.$$

В правой части уравнений получается полином степени $2n+1$ по λ и, следовательно, соответствующие два уравнения Абеля больше не являются уравнениями Ришело (3.28). Таким образом, это пример ситуации, когда преобразование времени сохраняет интегрируемость, но приводит к потере свойства суперинтегрируемости.

Первой целью этой главы была классификация систем типа Эйлера. Вторая цель данной главы — обсуждение метода Ришело, одного из старейших, но практически не освещённого в современной литературе, подхода к построению и исследованию суперинтегрируемых систем, допускающего разделение переменных в одной из ортогональных систем координат. Согласно [41, 96, 97], существует два класса суперинтегрируемых систем, в которых переменные типа угол либо *логарифмические*, либо *эллиптические* функции. В обоих случаях использование теорем сложения, являющихся частными случаями теоремы Абеля, позволяет получить дополнительные интегралы движения являющиеся однозначными функциями на всем фазовом пространстве.

Конечно, эти n-мерные суперинтегрируемые системы могут быть получены и другими известными методами (см. работы [16, 27, 33, 36, 58, 83] и ссылки в них). Тем не менее, новое определение (3.53,3.59)

$$V = \sum \mathrm{res}\Big|_{\lambda=e_i} \frac{\alpha(\lambda)}{u^2(\lambda)\, e(\lambda)}, \qquad u(\lambda) = \prod_{j=1}^{M} (\lambda - e_j)\,,$$

суперинтегрируемых потенциалов через производящую функцию $e(\lambda)$ системы координат и произвольный полином $\alpha(\lambda)$ может быть полезным в различных приложениях.

Глава 4

Разделение переменных для более широкого класса бигамильтоновых систем

В главе 2 было рассмотрено разделение переменных для L-систем. Такая постановка задачи автоматически накладывает ряд ограничений на класс систем, к которым может быть применён рассмотренный метод. В частности, для системы должен существовать L-тензор, и переменные разделения должны быть связаны с исходными переменными точечными преобразованиями. Существование L-тензора накладывает ограничения [21] на характеристики бигамильтоновой системы. В этой главе ограничения, установленные в главе 2, будут сняты, и будет рассмотрена задача разделения переменных для более широкого класса бигамильтоновых систем.

Для интегрируемых систем, допускающих разделение переменных (1.5), n независимых интегралов движения H_k находятся в би-инволюции

$$\{H_i, H_k\} = \{H_i, H_k\}' = 0\,, \qquad i, k = 1, \dots, n, \tag{4.1}$$

относительно совместимых скобок Пуассона $\{.,.\}$ и $\{.,.\}'$. Эти скобки задаются бивекторами Пуассона P и P', удовлетворяющими условиям

$$[P, P] = 0, \qquad [P, P'] = 0, \qquad [P', P'] = 0, \tag{4.2}$$

где $[.,.]$ — скобка Схоутена. Напомним, что скобка Схоутена определяется для тензоров A и B размерностей i и j, соответственно, координатным образом как

$$\begin{aligned}
[A, B]^{k_2 \dots k_{i+j}} &= \frac{1}{(i-j)!j!} \sum_{p,l,m} \varepsilon^{k_2 \dots k_{i+j}}_{l_2 \dots l_i\, m_1 \dots m_j} A^{p\, l_2 \dots l_i} \frac{\partial}{\partial x_p} B^{m_1 \dots m_j} \\
&\quad + \frac{(-1)^i}{i!(j-1)!} \sum_{p,l,m} \varepsilon^{k_2 \dots k_{i+j}}_{l_1 \dots l_i\, m_2 \dots m_j} B^{p\, m_2 \dots m_j} \frac{\partial}{\partial x^p} A^{l_1 \dots l_i}\,.
\end{aligned}$$

Для заданной интегрируемой бигамильтоновой системы построение переменных разделения состоит в прямом решении уравнений (4.1) и (4.2) относительно неизвестного бивектора P' по известным кинематическому бивектору P и семейству интегралов движения $H_1, \ldots, H_n$ [98, 101]. Однако в общем случае уравнения (4.1,4.2) имеют бесконечное число решений [95, 99], и для того, чтобы иметь практическую возможность найти решения, необходимо ввести дополнительные условия, ограничив таким образом область поиска решений. В качестве такого условия, не инвариантного относительно выбора системы координат, можно использовать ограничение на вид бивектора Пуассона P, обеспечивающее соответствие функции Гамильтона H натуральному виду (1.1).

Пусть интегрируемая система задана на n-мерном римановом многообразии Q, на кокасательном пространстве которого T^*Q можно естественным образом ввести канонический невырожденный бивектор Пуассона P:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \{f, g\} = \langle P\, df, dg \rangle = \sum_{i=1}^{2n} P_{ij} \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial z_j}, \tag{4.3}$$

где $z = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ — координаты на T^*Q. Функция Гамильтона, следуя определению (1.1), будет иметь натуральный вид

$$H = T + V = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{g}_{ij}\, p_i\, p_j + V(q_1, \ldots, q_n), \tag{4.4}$$

то есть будет представляться в виде суммы геодезического гамильтониана T, задаваемого свойствами Q, и потенциальной энергии V.

Для подавляющего большинства известных бигамильтоновых систем второй бивектор Пуассона P' также имеет натуральный вид [99, 100], то есть P' является суммой геодезического бивектора Пуассона P'_T и потенциального бивектора Пуассона, заданного (1,1)-тензорным полем с нулевым кручением

$\Lambda(q_1, \ldots, q_n)$ на Q, связанного с потенциалом V:

$$P' = P'_T + \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{ij} \\ & \\ -\Lambda_{ji} & \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{\partial \Lambda_{ki}}{\partial q_j} - \dfrac{\partial \Lambda_{kj}}{\partial q_i} \right) p_k \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Геодезический бивектор Пуассона P'_T при этом определяется матрицей размерности $n \times n$ на T^*Q и функциями x, y и z:

$$P'_T = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{x}_{jk}(q) \dfrac{\partial \Pi_{jk}}{\partial p_i} - \mathrm{y}_{ik}(q) \dfrac{\partial \Pi_{ik}}{\partial p_j} & \Pi_{ij} \\ & \\ -\Pi_{ji} & \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{\partial \Pi_{ki}}{\partial q_j} - \dfrac{\partial \Pi_{kj}}{\partial q_i} \right) \mathrm{z}_k(p) \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

При этом функции x, y и z однозначно определяются условиями совместимости бивекторов Пуассона

$$[P, P'_T] = [P'_T, P'_T] = 0. \tag{4.7}$$

Определения (4.4) и (4.5), как и определение функции Гамильтона натурального вида (1.1), зависят от выбора координатной системы.

4.1. Обобщённая система Энона–Эйлеса

Рассмотрим обобщённую систему Энона–Эйлеса [39, 47], заданную гамильтонианом

$$H_1 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{c_1}{8} q_2 (3q_1^2 + 16q_2^2) + c_2 \left(2q_2^2 + \frac{q_1^2}{8} \right) + \frac{c_4}{q_1^2} + \frac{c_5}{q_1^6} \tag{4.8}$$

и вторым интегралом движения

$$
\begin{aligned}
H_2 &= p_1^4+\left(\frac{q_1^2(3c_1q2+c_2)}{2}+\frac{4c_4}{q_1^2}+\frac{4c_5}{q_1^6}\right)p_1^2-\frac{c_1q_1^3}{2}p_1p_2-\frac{c_1^2q_1^6}{32}\\
&+ \frac{(c_2-3c_1q_2)(c_2+c_1q_2)q_1^4}{16}+c_1c_4q_2+\frac{c_2c_5+4c_4^2+3c_1c_5q_2}{q_1^4}\\
&+ \frac{8c_4c_5}{q_1^8}+\frac{4c_5^2}{q_1^{12}}\,.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Переменные разделения для случая $c_4=c_5=0$ были получены в [80], в работах [31, 78] эта система исследовалась с помощью аппарата матриц Лакса. В данном разделе этот результат будет воспроизведён в рамках бигамильтонова подхода к разделению переменных, а также будут получены новые переменные разделения для наиболее общего случая.

Случай $c_4=c_5=0$

Предположим, что для рассматриваемой системы бивектор Пуассона P' имеет натуральный вид (4.5). После подстановки выражений для интегралов $H_{1,2}$ (4.8,4.9) в уравнение (4.1) и решения полученного уравнения вместе с (4.2), получаем два различных решения P_1' и P_2'.

Первое решение, P_1', будучи записанным в виде (4.5,4.6) со значениями

$$
\mathrm{x}_{jk}=\mathrm{y}_{jk}=\delta_{jk}q_k\,,\qquad z_k(p)=0\,,
$$

отвечает геодезической матрице

$$
\Pi^{(1)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_1^2+\frac{1}{2}p_2^2 & 0\\ \\ \frac{1}{2}p_1p_2 & \frac{1}{2}p_2^2\end{pmatrix}
\tag{4.10}
$$

и потенциальной матрице

$$\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{q_1^2(3c_1q_2+c_2)}{8} + c_1q_2^3 + c_2q_2^2 & \frac{c_1q_1^3}{16} + \left(\frac{3c_1q_2}{2} + c_2\right) q_1q_2 \\ & \\ -\frac{c_1q_1^3}{32} & c_1q_2^3 + c_2q_2^2 \end{pmatrix}. \qquad (4.11)$$

При этом оператор рекурсии $N_1 = P_1'P^{-1}$ порождает семейство интегралов движения

$$\mathcal{H}_k = \frac{1}{2k}\,\mathrm{tr}\,N_1^k\,, \qquad k = 1, 2, \qquad (4.12)$$

составляющих бигамильтонову иерархию, то есть удовлетворяющих уравнениям Ленарда

$$P'd\mathcal{H}_1 = Pd\mathcal{H}_2. \qquad (4.13)$$

Эти интегралы, будучи выраженными через исходные интегралы движения (4.8,4.9) системы, принимают вид

$$\mathcal{H}_1 = 2H_1, \qquad \mathcal{H}_2 = \frac{H_2}{8} + \frac{H_1^2}{2}\,.$$

Таким образом, первый оператор рекурсии $N_1 = P_2'P^{-1}$ порождает переменные-действие $\mathcal{H}_{1,2}$, которые и являются инвариантами движения, но соответствующие уравнения движения

$$\frac{d}{dt}H_{1,2} = 0$$

тривиальны.

Второе решение P_2' можно задать матрицами

$$\Pi^{(2)} = \frac{1}{2q_1^2}\begin{pmatrix} 2p_1^2 & 0 \\ & \\ p_1p_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{c_1q_2}{2} + \dfrac{c_2}{4} & \dfrac{c_1q_1}{8} + \dfrac{q_2(3c_1q_2 + 2c_2)}{q_1} \\ & \\ -\dfrac{c_1q_1}{16} & -\dfrac{c_1q_2}{4} \end{pmatrix} \qquad (4.14)$$

и функциями

$$\mathrm{x}_{j1} = \mathrm{y}_{i1} = -q_1\,, \qquad \mathrm{z}_k(p) = 0\,.$$

В отличие от предыдущего случая, здесь выполняются не уравнения Ленарда (4.13), а уравнения

$$P' dH_i = P \sum_{j=1}^{2} F_{ij}\, dH_j, \qquad i = 1, \ldots, 2, \tag{4.15}$$

с контрольной матрицей F

$$F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4p_1^2 q_1^{-2} + c_1 q_2 + c_2 & q_1^2 \\ & \\ 16H_2\, q_1^{-2} & 4p_1^2 q_1^{-2} + c_1 q_2 + c_2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения контрольной матрицы F совпадают с собственными значениями оператора рекурсии, которые являются искомыми переменными разделения.

Именно этот второй оператор рекурсии $N_2 = P_2' P^{-1}$ и порождает нетривиальные переменные разделения с нетривиальными разделёнными уравнениями, которые будут рассмотрены в следующем подразделе.

Как обычно, операторы рекурсии $N_{1,2}$ порождают два бесконечных семейства решений уравнений (4.1,4.2)

$$P_{1,2}^{(m)} = N_{1,2}^m\, P\,, \qquad m = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \tag{4.16}$$

соответствующих гамильтонианам $H_{1,2}$ (4.8,4.9).

Случай $c_{4,5} \neq 0$

В случае $c_5 \neq 0$ воспользуемся каноническим преобразованием координат, предложенным в работе [99]

$$p_1 \to p_1 + \sqrt{\frac{-2c_5}{q_1^6}}\,, \tag{4.17}$$

применив его к натуральным бивекторам Пуассона $P'_{1,2}$. В общем случае интегралы движения $H_{1,2}$ (4.8,4.9) находятся в инволюции относительно скобок Пуассона, задаваемых изменёнными бивекторами

$$\hat{P}_1 = P'_1 + \frac{\sqrt{-2c_5}}{q_1^3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2c_5}{q_1^6}} & 0 \\ * & 0 & p_2 & 0 \\ * & * & 0 & \frac{3c_1}{8}q_1^2 + 6c_1q_2^2 + 4c_2q_2 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

и

$$\hat{P}_2 = P'_2 + \frac{2\sqrt{-2c_5}}{q_1^5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2c_5}{q_1^6}} & 0 \\ * & 0 & p_2 & 0 \\ * & * & 0 & \frac{3c_1q_1^2}{8} + 6c_1q_2^2 + 4c_2q_2 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Эти бивекторы были получены подстановкой полиномиального анзаца для геодезического бивектора P'_T в уравнение (4.7). В отличие от пары бивекторов $P'_{1,2}$ (4.10,4.14), эти бивекторы $\hat{P}_{1,2}$ порождают переменные разделения с нетривиальными разделёнными уравнениями в обоих случаях.

Рассмотрим оператор рекурсии $\hat{N}_2 = \hat{P}_2 P^{-1}$ и его собственные значения $u_{1,2}$ — корни полинома

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= (\lambda - u_1)(\lambda - u_2) = \lambda^2 - \left(\frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{c_1q_2 + c_2}{4} + \frac{2\sqrt{-2c_5}\,p_1}{q_1^5} - \frac{2c_5}{q_1^8}\right)\lambda \\ &- \frac{c_1(4p_1^2q_2 - 2q_1p_1p_2 - c_2q_1^2q_2)}{16q_1^2} + \frac{c_1^2(8q_1^2 + q_2)}{16} \\ &- \frac{c_1\sqrt{-2c_5}(4p_1q_2 - q_1p_2)}{8q_1^5} + \frac{c_1c_5q_2}{2q_1^8}\,. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Следуя работам [98, 99, 101], построим дополнительный полином $A(\lambda) =$

$a_1\lambda + a_0$, являющийся решением уравнений

$$\begin{aligned}\{B(\lambda), A(\mu)\} &= -\frac{\big(d_2\mu^2 + d_1\mu + d_0\big)\,B(\lambda) - \big(d_2\lambda^2 + d_1\mu + d_0\big)\,B(\mu)}{\lambda-\mu}\,, \\ \{A(\lambda), A(\mu)\} &= 0\end{aligned} \tag{4.21}$$

относительно неизвестных функций $a_{1,0}$, $d_{1,2}$ и d_0. В рассматриваемом случае $d_2 = d_0 = 0$, $d_0 = 1$, и искомый полином

$$A(\lambda) = -\frac{64(q_1^3p_1 + \sqrt{-2c_5})}{c_1^2q_1^4}\,\lambda - \frac{4(4p_1q_2 - q_1p_2)}{c_1q_1} - \frac{16\sqrt{-2c_5}q_2}{c_1q_1^4}$$

удовлетворяет уравнениям

$$\{B(\lambda), A(\mu)\} = -\frac{1}{\lambda-\mu}\Big(B(\lambda) - B(\mu)\Big)\,, \qquad \{A(\lambda), A(\mu)\} = 0\,.$$

После того, как полином $A(\lambda)$ найден, легко найти сопряжённые импульсы

$$p_{u_j} = A(\lambda = u_j)\,, \qquad \{u_i, p_{u_j}\} = \delta_{ij}\,, \qquad i,j = 1,2.$$

Обратное каноническое преобразование от переменных разделения к исходным переменным выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \sqrt{\frac{c_1^2(p_{u_1}^2 - p_{u_2}^2)}{32\,(u_1-u_2)} + 32\,\frac{c_2(u_1+u_2) - 4(u_1^2 - u_1u_2 - u_2^2)}{c_1^2}}\,, \\
p_1 &= -\frac{c_1^2(p_{u_1} - p_{u_2})}{64(u_1-u_2)}\,q_1 - \frac{\sqrt{-2c_5}}{q_1^3}\,, \\
q_2 &= -c_1^3\left(\frac{p_{u_1} - p_{u_2}}{32(u_1-u_2)}\right)^2 + \frac{4(u_1+u_2) - c_2}{c_1}\,, \\
p_2 &= 2c_1^5\left(\frac{p_{u_1} - p_{u_2}}{32(u_1-u_2)}\right)^3 \\
&+ \frac{c_1}{4(u_1-u_2)}\left(\frac{p_{u_1} - p_{u_2}}{4}\,c_2 - (u_1+2u_2)p_{u_1} + (2u_1+u_2)p_{u_2}\right)\,.
\end{aligned}$$

Теперь несложно вычислить разделённые уравнения

$$\Phi(u_k,p_{u_k}) = \Phi_+(u_k,p_{u_k})\Phi_-(u_k,p_{u_k}) - \frac{c_4(c_2-8u_k)}{4} + \frac{c_1^2\sqrt{-2c_5}\,p_{u_k}}{32} = 0\,, \quad k=1,2, \tag{4.22}$$

где

$$\Phi_\pm(u_k,p_{u_k}) = \left(\frac{c_1^2p_{u_k}^2}{32} - H_1 \pm \frac{\sqrt{H_2}}{2} - \frac{128u_k^3}{c_1^2} + \frac{32c_2u_k^2}{c_1^2}\right)\,.$$

Эти разделённые уравнения задаются аффинными уравнениями от гамильтонианов H_1 и $H_2 - 4H_1^2$. Таким образом, обобщённая система Энона–Эйлеса принадлежит к семейству штеккелевских интегрируемых систем.

При значениях параметров $c_4 = c_5 = 0$ разделённые уравнения (4.22) сводятся к паре разделённых уравнений

$$\Phi_+(u_1,p_{u_1}) = 0 \qquad \text{и} \qquad \Phi_-(u_2,p_{u_2}) = 0\,,$$

и уравнения движения линеаризуются на двух различных эллиптических кривых [31, 78, 80].

В общем случае $c_4 \neq 0$ и $c_5 \neq 0$ уравнения движения линеаризуются на двух экземплярах негиперэллиптической кривой третьего порядка, заданной уравнением (4.22). Явное описание процедуры линеаризации для этого случая не построено, как и для обобщённых систем Ковалевской и Чаплыгина [98, 101].

Используя первый бивектор $\hat{P}_1$ (4.18), можно получить другие переменные разделения

$$\widehat{B}(\lambda) = \Bigl(\det(\hat{P}_1P^{-1} - \lambda\mathrm{I})\Bigr)^{1/2} = (\lambda - v_1)(\lambda - v_2)\,,$$

которые связаны с рассмотренными выше переменными разделения каноническим преобразованием

$$v_k = \frac{c_1^2p_{u_k}^2}{64} - \frac{64u_k^3}{c_1^2} + \frac{16c_2u_k^2}{c_1^2}\,, \qquad k=1,2.$$

4.2. Обобщённая система с потенциалом четвёртой степени

Рассмотрим обобщение системы с потенциалом четвёртого порядка, введённое в работе [47], с гамильтонианом

$$H_1 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{c_1}{4}\left(q_1^4 + 6q_1^2q_2^2 + 8q_2^4\right) + \frac{c_2}{2}\left(q_1^2 + 4q_2^2\right) + \frac{2c_3}{q_2^2} + \frac{c_4}{q_1^2} + \frac{c_5}{q_1^6} \quad (4.23)$$

и вторым интегралом движения

$$\begin{aligned} H_2 \; = p_1^4 \; &+ p_1^2\left(c_1q_1^4 + 6c_1q_1^2q_2^2 + 2c_2q_1^2 + \frac{4c_4}{q_1^2} + \frac{4c_5}{q_1^6}\right) - 4c_1q_1^3q_2p_1p_2 \\ &+ c_1q_1^4p_2^2 + \frac{4c_4^2}{q_1^4} + 2c_1c_4q_1^2 + 4c_1c_4q_2^2 + c_2^2q_1^4 + c_1c_2q_1^6 \\ &+ 2c_1c_2q_1^4q_2^2 + \frac{c_1^2q_1^8}{4} + c_1^2q_1^6q_2^2 + c_1^2q_1^4q_2^4 + \frac{4c_1c_3q_1^4}{q_2^2} \\ &+ c_5\left(\frac{8c_4}{q_1^8} + \frac{4c_5}{q_1^{12}} + \frac{4c_2}{q_1^4} + \frac{2c_1}{q_1^2} + \frac{12c_1}{q_1^4q_2^2}\right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Для этой системы существуют разделённые уравнения; в зависимости от значений параметров c_4 и c_5 разделённые уравнения будут иметь штеккелевский или нештеккелевский вид. Для случая $c_4 = c_5 = 0$ разделённые штеккелевские уравнения были представлены в [78, 80]. В данном разделе этот результат будет воспроизведён в рамках бигамильтоновой геометрии, а затем этот подход будет применён к случаю $c_{4,5} \neq 0$ для получения нештеккелевских разделённых уравнений.

4.2.1. Случай $c_4 = c_5 = 0$

В работе [99] было показано, что обобщённая система с потенциалом четвёртого порядка с параметрами c_4 и c_5, равными нулю, является одной из систем, для которых существуют ещё одни скобки Пуассона, помимо стандартных, относительно которых коммутируют первый и второй интегралы движения. Эти скобки Пуассона могут быть представлены с помощью бивекторов

$$\Pi = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1^2}{q_1^2} & 0 \\ \dfrac{p_1 p_2}{2q_1^2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} c_2 + c_1\left(\dfrac{q_1^2}{2} + 2q_2^2\right) & c_1 q_1 q_2 + 2\dfrac{2c_1 q_2^6 + c_2 q_2^4 - c_3}{q_1 q_2^3} \\ -\dfrac{c_1 q_1 q_2}{2} & -c_1 q_2^2 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

в уравнениях (4.5–4.6) с функциями

$$\mathrm{x}_{j1} = \mathrm{y}_{i1} = -q_1\,, \qquad \mathrm{z}_k(p) = 0\,.$$

Бивектор P' (4.5) вместе с бивектором P (4.3) позволяет вычислить оператор рекурсии $N = P'P^{-1}$, собственные значения которого являются переменными разделения $u_{1,2}$

$$\begin{aligned} B(\lambda) = \ & \Big(\det(N - \lambda \mathrm{I})\Big)^{1/2} = \lambda^2 + \frac{q_1^4 c_1 + 2c_2 q_1^2 + 2q_1^2 c_1 q_2^2 + 2p_1^2}{2q_1^2}\lambda \\ & + \frac{c_1(q_2^2 q_1^2 p_2^2 + 4c_3 q_1^2 + 4p_1^2 q_2^4 - 4p_1 q_2^3 q_1 p_2}{4q_1^2 q_2^2} = (\lambda - u_1)(\lambda - u_2)\,. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Для нахождения сопряжённых импульсов построим ещё один полином $A(\lambda)$, являющийся решением дополнительных уравнений

$$\begin{aligned} \{A(\lambda), B(\mu)\}' &= \frac{\big(d_1\mu^2 + d_2\mu + s_1\big)\,B(\lambda) - \big(d_1\lambda^2 + d_2\mu + s_1\big)\,A(\mu)}{\lambda - \mu}\,, \\ \{A(\lambda), A(\mu)\}' &= 0. \end{aligned}$$

Как показано в работе [99], искомые импульсы выражаются в виде

$$p_{u_j} = \frac{A(u_j)}{d_1 u_j}\,. \tag{4.27}$$

В нашем случае полином $A(\lambda)$ равен

$$A(\lambda) = -\frac{d_1 p_1}{c_1 q_1}\lambda - \frac{d_1 q_2^2 p_1}{q_1} + \frac{d_1 q_2 p_2}{2}\,, \tag{4.28}$$

что позволяет легко вычислить переменные разделения.

В переменных разделения интеграл H_2 выражается в виде полного квадрата, и легко показать, что H_1 и H_2 в новых переменных удовлетворяют двум разделённым уравнениям

$$\begin{aligned} \Phi_-\left(u_1, p_{u_1}\right) &= H_1 - \frac{1}{2}\sqrt{H_2} + 2c_1 u_1 p_{u_1}^2 - \frac{2u_1^2}{c_1} + \frac{2c_2 u_1}{c_1} + \frac{2c_1 c_3}{u_1} = 0\,, \\ \Phi_+\left(u_2, p_{u_2}\right) &= H_1 + \frac{1}{2}\sqrt{H_2} + 2c_1 u_2 p_{u_2}^2 - \frac{2u_2^2}{c_1} + \frac{2c_2 u_2}{c_1} + \frac{2c_1 c_3}{u_2} = 0\,. \end{aligned} \tag{4.29}$$

4.2.2. Случай $c_{4,5} \neq 0$

Теперь для той же системы, заданной функцией Гамильтона (4.23), рассмотрим два члена с коэффициентами c_4 и c_5.

Интегралы движения H_1 и H_2 по-прежнему находятся в инволюции относительно первой скобки Пуассона

$$\{H_1, H_2\} = 0\,,$$

но при вычислении второй скобки Пуассона, заданной бивектором P', вычисленным по (4.25), получается

$$\begin{aligned} \{H_1, H_2\}' &= \frac{8c_1 c_5}{q_1^{12} q_2^2}\Big(-p_2^2 q_1^7 q_2^2 p_1 - 4q_1^7 c_3 p_1 + 3q_1^6 p_2 q_2^3 p_1^2 + 2q_1^4 p_2 q_2^3 c_4 \\ &- q_1^8 p_2 q_2^3 c_2 + 4p_1 q_2^4 c_2 q_1^7 + 6p_2 q_2^3 c_5 - q_1^{10} p_2 c_1 q_2^3 - 3q_1^8 p_2 c_1 q_2^5 \\ &+ 3p_1 q_2^4 q_1^9 c_1 + 8p_1 q_2^6 q_1^7 c_1\Big). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Поскольку в правую часть c_5 входит как множитель, один способ добиться того, чтобы эта скобка Пуассона равнялась нулю — положить $c_5 = 0$. Тогда H_1 и H_2 снова оказываются в би-инволюции, но H_2 теперь не являтся полным квадратом и уравнения (4.29) больше не выполняются. Тем не менее, можно заметить, что произведение $\Phi_-(u_j, p_{u_j})$ и $\Phi_+(u_j, p_{u_j})$ не содержит квадратного корня из H_2.

$$\Phi_-(u, p_u)\Phi_+(u, p_u) = \left(H_1 + 2c_1 u p_u^2 - \frac{2u^2}{c_1} + \frac{2c_2 u}{c_1} + \frac{2c_3 c_1}{u}\right)^2 - \frac{H_2}{4} \tag{4.31}$$

Более того,

$$\Phi_-(u_1,p_{u_1})\Phi_+(u_1,p_{u_1}) = c_4\left(c_2 - 2u_1\right)$$

и

$$\Phi_-(u_2,p_{u_2})\Phi_+(u_2,p_{u_2}) = c_4\left(c_2 - 2u_2\right) .$$

Итак, добавив дополнительный член с $c_4 \neq 0$ к гамильтониану, вместо двух разделённых уравнений (4.29) получаем другую пару разделённых уравнений

$$\Phi(u_k,p_{u_k}) = \Phi_-(u_k,p_{u_k})\Phi_+(u_k,p_{u_k}) + c_4\left(2u_k - c_2\right) = 0\,. \tag{4.32}$$

Теперь рассмотрим второй способ зануления правой части в уравнении (4.30). На этот раз положим $c_5 \neq 0$ и добьёмся того, чтобы H_1 и H_2 оказались в би-инволюции относительно второй скобки Пуассона, меняя бивектор Пуассона P'. После канонического преобразования

$$p_1 \to p_1 - \sqrt{\frac{-2c_5}{q_1^6}} \tag{4.33}$$

правая часть (4.30) становится равной нулю за счёт сдвига бивектора P', и интегралы движения H_1 и H_2 снова коммутируют относительно двух скобок Пуассона. Вычислив тензор рекурсии N, найдём новые переменные как корни характеристического полинома $B(\lambda)$, отличающегося от (4.26) дополнительным членом

$$\begin{aligned} B(\lambda) \to \quad & B(\lambda) \\ + \quad & \frac{\left(2p_1q_1^3\sqrt{-2c_5}\lambda - 2\lambda c_5 + 2q_2^2p_1q_1^3\sqrt{-2c_5}c_1 - 2c_5c_1q_2^2 - q_1^4p_2\sqrt{-2c_5}c_1q_2\right)}{q_1^8}, \end{aligned}$$

и найдём новые импульсы по формуле (4.27), подставив в неё новое значение полинома $A(\lambda)$

$$A(\lambda) = -\frac{\left(p_1 + \sqrt{\dfrac{-2c_5}{q_1^6}}\right)\lambda}{c_1q_1} - \frac{q_2^2\left(p_1 + \sqrt{\dfrac{-2c_5}{q_1^6}}\right)}{q_1^2} + \frac{p_2q_2}{2}\,.$$

Теперь несложно показать, что в этих новых переменных существует два разделённых уравнения

$$\Phi\left(u_k, p_{u_k}\right) = \Phi_+\left(u_k, p_{u_k}\right)\Phi_-\left(u_k, p_{u_k}\right) + c_4\left(2u_k - c_2\right) - 2\sqrt{-2c_5}p_{u_k}u_k c_1 = 0\,, \tag{4.34}$$

где

$$\Phi_\pm\left(u_k, p_{u_k}\right) = H_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{H_2} + 2c_1 u_k p_{u_k}^2 - \frac{2u_k^2}{c_1} + \frac{2c_2 u_k}{c_1} + \frac{2c_1 c_3}{u_k} = 0 \tag{4.35}$$

и $H_{1,2}$ — интегралы (4.23–4.24), переписанные в новых переменных.

В случае $c_4 = c_5 = 0$ уравнения (4.34) сводятся к паре штеккелевских уравнений

$$\Phi_-\left(u_1, p_{u_1}\right) = 0 \qquad \text{и} \qquad \Phi_+\left(u_2, p_{u_2}\right) = 0$$

обсуждавшихся выше.

Обобщая результаты данной главы, можно сделать вывод, что использование методов бигамильтоновой геометрии позволяет вычислить переменные разделения, применяя общие для всех интегрируемых систем геометрические принципы и разные интегралы движения, отвечающие конкретным интегрируемым системам.

Накладывая вполне разумные ограничения (4.5) и (4.6), можно перейти от «угадывания» переменных разделения, как в случаях Ковалевской, Чаплыгина и Флашки, к их построению на регулярной основе. В отличие от метода Склянина в этом случае нам достаточно знать только интегралы движения, а не уравнения движения в форме уравнений Лакса и соответствующей классической r-матрицы.

Литература

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1991.

2. Бабич М. В., Бобенко А. И., Матвеев В. Б. Решения нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, в тэта-функциях Якоби и симметрии алгебраических кривых // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. С. 511–529.

3. Болсинов А. В., Борисов А. В. Представление Лакса и согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли // Мат. Замет. 2002. Т. 72. С. 11–34.

4. Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твёрдого тела. Гамильтоновы методы, интегригуемость, хаос. Москва-Ижевск: ИКИ, 2005.

5. Григорьев Ю. А. Программное обеспечение для построения переменных разделения в уравнении Гамильтона-Якоби // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 4: Физика. Химия. 2010. № 2. С. 107–112.

6. Григорьев Ю. А., Цыганов А. В. О вычислении переменных разделения в уравнении Гамильтона-Якоби на компьютере // Нелинейная динамика. 2005. Т. 1, № 2. С. 163–179.

7. Григорьев Ю. А., Цыганов А. В. Об уравнениях Абеля и интегралах Ришело // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 4. С. 463–478.

8. Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д. Уравнение Кортевега-де Фриза – вполне интегрируемая система // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5. С. 18–27.

9. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995. 432 с.

10. Рейман А. Г., Семенов-Тян-Шанский М. А. Интегрируемые системы. Москва-Ижевск: ИКИ, 2003.

11. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.

12. Abenda S. Reciprocal transformations and local Hamiltonian structures of hydrodynamic type systems // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. Vol. 42, no. 095208. 20 pp.

13. Adler M. Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras, and curves // Adv. Math. 1980.

14. Babich M. V., Bordag L. A. Projective Differential Geometrical Structure of the Painlevé Equations // Journal of Differential Equations. 1999. Vol. 157, no. 2. Pp. 452 – 485.

15. Baker H. F. Abel's theorem and the allied theory including the theory of the theta functions. Cambridge: University Press, 1897.

16. Ballesteros A., Herranz F. J. Universal integrals for superintegrable systems on N-dimensional spaces of constant curvature // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. Vol. 40. Pp. F51–F59.

17. Bartocci C., Falqui G., Pedroni M. A geometric approach to the separability of the Neumann-Rosochatius system // Differential Geom. Appl. 2004. Vol. 21, no. 3. Pp. 349–360.

18. Benenti S. Orthogonal separable dynamical systems // Differential Geometry and Its Applications. 1993. Vol. 1. Pp. 163–184.

19. Benenti S., Chanu C., Rastelli G. Remarks on the connection between the additive separation of the Hamilton-Jacobi equation and the multiplicative

separation of the Schrödinger equation // J. Math. Phys. 2002. Vol. 43. Pp. 5183–5253.

20. Bertrand J. Thèorème relatif au mouvement d´un point attirévers un centre fixe // Comptes Rendus. Acad. Sci. Paris. 1873. Vol. LXXVII. Pp. 849–853.

21. Bolsinov A. V., Matveev V. S. Geometrical interpretation of Benenti systems // J. Geom. Phys. 2003. Vol. 44. Pp. 489–506.

22. Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Superintegrable system on a sphere with the integral of higher degree // Regular and Chaotic Dynamics. 2009. Vol. 14, no. 6. Pp. 615–620.

23. Boyer C. P., Kalnins E. G., Miller W., Jr. Stäckel-equivalent integrable Hamiltonian systems // SIAMJ. Math. Anal. 1986. Vol. 17. Pp. 778–797.

24. Caley A. An Elementary Treatise on Elliptic Functions. London: Constable and Company Ltd, 1876.

25. Crampin M., Sarlet W., Thompson G. Bi-differential calculi, bi-Hamiltonian systems and conformal Killing tensors. // J. Phys. F. 2000. Vol. 33. Pp. 8755–8770.

26. Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications geómétriques du calcul infinitésimal. Paris: Gauthier-Villars, 1887-89. Vol. 1–4. Pp. 1–4.

27. Daskaloyannis C., Ypsilantis K. Unified treatment and classification of superintegrable systems with integrals quadratic in momenta on a two-dimensional manifold // J. Math. Phys. 2006. Vol. 47, no. 042904.

28. Drach J. Sur l'intégration logique des équations de la dynamique à deux

variables: Forces conservatives. Intêgrales cubiques. Mouvements dans le plan. // Comptes Rendus. 1935. Vol. 200. Pp. 22–26.

29. Dubrovin B. A., Matveev V. B., Novikov S. P. Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties // Russ. Math. Surv. 1976. Vol. 31, no. 59.

30. Eisenhart L. P. Separable systems of Stäckel // Ann.Math. 1934. Vol. 35. Pp. 284–305.

31. Enolskii V. Z., Salerno M. Lax Representation for two particle dynamics splitting on two tori // J. Phys. A: Math. Theor. 1996. Vol. 29. Pp. L425–31.

32. Euler L. Calculi integralis // Ac. Sc. Petropoli. 1768. Vol. 1–3. Pp. 1–3.

33. Evans N. W. Superintegrability in classical mechanics // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41. Pp. 5666–5676.

34. Falqui G., Pedroni M. Separation of variables for bi-Hamiltonian systems // Math. Phys. Anal. Geom. 2003. Vol. 6. Pp. 139–179.

35. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonlinear problems. I. Los Alamos report LA-1940, Ed. by E. Segré. University of Chicago Press, 1965.

36. Fris J., Mandrosov V., Smorodinsky Y. A. et al. On higher symmetries in quantum mechanics // Phys. Lett. 1965. Vol. 16. Pp. 354–356.

37. Gardner C. S., Greene J. M., Miura R. M., Kruskal M. D. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. Vol. 19. Pp. 1095–1097.

38. Garnier R. Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale est uniform et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont

l'intégrale générale a ses point critiques fixés. // Ann. Sci. de l'ENS. 1912. Vol. 29. Pp. 1–126.

39. Grammaticos B., Dorizzi B., Ramani A. Hamiltonians with high-order integrals and the weak-Painlevé concept // J. Math. Phys. 1984. Vol. 25. P. 3470.

40. Greenhill A. G. The applications of elliptic functions. London: Macmillan and Co, 1892.

41. Grigoryev Yu. A., Khudobakhshov V. A., Tsiganov A. V. On the Euler superintegrable systems // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. Vol. 42, no. 7, 075202. 11 pp.

42. Grigoryev Yu. A., Tsiganov A. V. Symbolic software for separation of variables in the Hamilton-Jacobi equation for the L-systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2005. Vol. 10, no. 4. Pp. 413–422.

43. Grigoryev Yu. A., Tsiganov A. V. On the Darboux-Nijenhuis variables for the open Toda lattice // Symmetry, Integrability and Geometry - Methods and Applications. 2006. Vol. 2, 097. 15 pp.

44. Grigoryev Yu. A., Tsiganov A. V. Separation of variables for the generalized Henon-Heiles system and system with quartic potential // J. Phys. A: Math. Theor. 2011. Vol. 44, no. 25, 255202. 9 pp.

45. Hamilton W. R. On a general method in dynamics // Philosophical Transactions of the Royal Society, part II for 1834. 1834. Vol. 17. Pp. 247–308.

46. Hietarinta J. Integrable families of Hénon-Heiles-type Hamiltonians and a new duality // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28. Pp. 3670–3672.

47. Hietarinta J. Direct methods for the search of the second invariant // Physics Reports. 1987. Vol. 147. Pp. 87–154.

48. Hietarinta J., Grammaticos B., Dorizzi B., Ramani A. A. Coupling-constant metamorphosis and duality between integrable Hamiltonian systems // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. Pp. 1707–1710.

49. Hirota R. Exact solution of the Korteweg—de Vries equation for multiple collisions of solitons // Physical Review Letters. 1971.

50. Holt C. R. Construction of new integrable Hamiltonians in two degrees of freedom // J. Math. Phys. 1982. Vol. 23, no. 1037. 10 pp.

51. Horwood R. T., McLenaghan R. G., Smirnov R. G. Invariant classification of orthogonally separable Hamiltonian systems in Euclidean space // Commun. Math. Phys. 2005. Vol. 259. Pp. 679–709.

52. Ibort A., Magri F., Marmo G. Bihamiltonian structures and Stäckel separability // J. Geometry and Physics. 2000. Vol. 33. Pp. 210–228.

53. Jacobi C. G. J. Sur le movement d'un point et sur un cas particulier du problème des trois corps // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 1836. Vol. 3. Pp. 59–61.

54. Jacobi C. G. J. Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variablen auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen. // Journal für die reine und angewandte Mathematik. Journal de Crelle. Berlin. 1838. Vol. 17. Pp. 97–162.

55. Jacobi C. G. J. Über eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen

algebraischen Integralgleichungen // J. Reine Angew. Math. 1846. Vol. 32. Pp. 220–227.

56. Jacobi C. G. J. Vorlesungen über Dynamik, Ed. by A. Clebsch. Chelsea, 1866.

57. Kalnins E., Kress J. M., Pogosyan G. S., Miller W. Completeness of superintegrability in two-dimensional constant-curvature spaces // J. Phys. A: Math. Gen. 2001. Vol. 34. P. 4705.

58. Kalnins E. G., Kress J. M., Miller W., Jr. Second-order superintegrable systems in conformally flat spaces. I,II,III // J.Math.Phys. 2005. Vol. 46, no. 053509. 28 pp.

59. Kalnins E. G., Kress J. M., Miller W., Jr. Nondegenerate 2D complex Euclidean superintegrable systems and algebraic varieties // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. Vol. 40. Pp. 3399–3411.

60. Kalnins E. G., Miller W., Jr. Killing tensors and variable separation for Hamilton-Jacobi and Helmholtz equations // SIAM J. Math. Anal. 1980. Vol. 11. Pp. 1011–1026.

61. Kalnins E. G., Miller W., Jr. Separation of variables on n-dimensional Riemannian manifolds. I. The n-sphere S_n and Euclidean n-space R_n // J. Math. Phys. 1986. Vol. 27. Pp. 1721–1736.

62. Kazhdan D., Kostant B., Sternberg S. Hamiltonian group actions and dynamical systems of calogero type. // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1978. Vol. 31. Pp. 481–507.

63. Koenigs M. G. Sur les géodésiques a intégrales quadratiques. Note II // G. Darboux, Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces. 1898.

64. Komarov I. V. Goryachev-Chaplygin top in quantum mechanics // Theor. Math. Phys. 1982. Vol. 50. Pp. 265–270.

65. Korteweg D. J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves // Phil. Mag. 1895. Vol. 39. Pp. 422–443.

66. Kowalevski S. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Mathematica. 1889. Vol. 12, no. 2.

67. Krazer A. Lehrbuch der Thetafunctionen. New York: Chelsea, 1970.

68. Kuznetsov V. B., Tsiganov A. V. Separation of variables for the quantum relativistic Toda lattices: Tech. Rep. 94-07: University of Amsterdam, 1994.

69. Lagrange J. L. Théorie des fonctions analytiques. Chapter 2. 1797.

70. Lax P. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Comm. Pure Applied Math. 1968. Vol. 21. Pp. 467–490.

71. Levi-Civita T. Integrazione delle equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili // Math. Ann. 1904. Vol. 24. Pp. 383–397.

72. Liouville J. Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique // J. Math. Pures Appl. 1855.

73. Nekhoroshev N. N. Action-angle variables and their generalization // Trans. Moscow Math. Soc. 1972. Vol. 26. Pp. 180–198.

74. Neumann C. De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticorum classem revocatur // J. Reine Angew. Math. 1859. Vol. 56. Pp. 46–63.

75. Painlevé P. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme // Acta Mathematica. 1902.

76. Pasquier V., Gaudin M. The periodic Toda chain and a matrix generalization of the Bessel function recursion relations // J. Phys. A: Math. Gen. 1992. Vol. 25. Pp. 5243–5252.

77. Ramani A., Grammaticos B., Bountis T. The Painlevé property and singularity analysis of integrable and non-integrable systems // Phys. Rep. 1989. Vol. 180. Pp. 159–245.

78. Rauch-Wojciechowski S., Tsiganov A. V. Quasi-point separation of variables for Henon-Heiles system and system with quartic potential // J. Phys. A: Math. Theor. 1996. Vol. 29. Pp. 7769–78.

79. Rauch-Wojciechowski S., Waksjö C. How to find separation coordinates for the Hamilton-Jacobi equation: a criterion of separability for natural Hamiltonian systems // Math. Phys. Anal. Geom. 2003. Vol. 6, no. 4. Pp. 301–348.

80. Ravoson V., Ramani A., Grammaticos B. Generalized separability for a Hamiltonian with nonseparable quartic potential // Phys. Lett. A. 1994. Vol. 191. Pp. 91–5.

81. Reiman A. G. Integrable Hamiltonian systems connected with graded Lie algebras. Differential geometry, Lie groups and mechanics. Part III // Zap. Nauchn. Sem. LOMI. 1980. Vol. 95. Pp. 3–54.

82. Richelot F. Über die Integration eines merkwürdigen Systems von Differentialgleichungen // J. Reine Angew. Math. 1842. Vol. 23. Pp. 354–369.

83. Rodríguez M. A., Tempesta P., Winternitz P. Reduction of superintegrable

systems: the anisotropic harmonic oscillator // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 78, no. 046608. 6 pp.

84. Schouten J. A. Ricci Calculus. Berlin: Springer, 1954.

85. Semenov-Tian-Shansky M. A. What is a classical r-matrix? // Funct. Anal. Appl. 1983. Vol. 17, no. 4. Pp. 259–272.

86. Sklyanin E. K. The quantum Toda chain // Non-linear equations in classical and quantum field theory / Ed. by N. Sanchez. Springer, 1985. Vol. 226 of Lecture Notes in Physics. P. 196–233.

87. Sklyanin E. K. Functional Bethe ansatz // Integrable and superintegrable systems / Ed. by B. A. Kupershmidt. World Scientific, 1990. Pp. 8–33.

88. Sklyanin E. K. Separation of variables — new trends // Progr. Theor. Phys. Suppl. 1995. Vol. 118. P. 35.

89. Stäckel P. Uber die Integration der Hamilton–Jacobischen Differential Gleichung Mittelst Separation der Variabel. Halle: Habilitationsschrift, 1891.

90. Toda M. Vibration of a chain with nonlinear interaction // J. Phys. Soc. Japan 22. 1967. Pp. 431–436.

91. Toda M. Wave propagation in anharmonic lattice // J. Phys. Soc. Japan. 1967. Pp. 501–596.

92. Tsiganov A. V. Duality between integrable Stäckel systems // J. Phys.A: Math. Gen. 1999. Vol. 32. Pp. 7965–7982.

93. Tsiganov A. V. The Lax representation for the Holt system // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. Vol. 32. Pp. 7983–7987.

94. Tsiganov A. V. The Stäckel systems and algebraic curves // J. Math. Phys. 1999. Vol. 40. Pp. 279–298.

95. Tsiganov A. V. On the two different bi-Hamiltonian structures for the Toda lattice // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. Vol. 40. Pp. 6395–406.

96. Tsiganov A. V. Addition theorem and the Drach superintegrable systems // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. Vol. 41(33), no. 335204. 16 pp.

97. Tsiganov A. V. Leonard Euler: addition theorems and superintegrable systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2009. Vol. 14, no. 3. Pp. 389–406.

98. Tsiganov A. V. New variables of separation for particular case of the Kowalevski top // Regular and Chaotic Dynamics. 2010. Vol. 15, no. 6. Pp. 657–67.

99. Tsiganov A. V. On bi-integrable natural Hamiltonian systems on the Riemannian manifolds // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2010. Vol. 18, no. 2. P. 245.

100. Tsiganov A. V. On natural Poisson bivectors on the sphere // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. Vol. 44, no. 105203.

101. Tsiganov A. V. On the generalized Chaplygin system // Journal of Mathematical Sciences. 2010. Vol. 168, no. 8. Pp. 901–11.

102. Weierstrass K. Bemekungen über die integration der hyperelliptischen differential-gleichungen // Math. Werke. 1895. Vol. I. 267 pp.

103. Zabuski N. J., Kruskal M. D. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the re-currence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 15. Pp. 240–243.